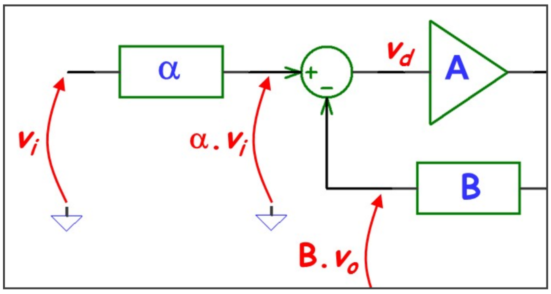
Limite en « hautes fréquences » d'un système bouclé en CR



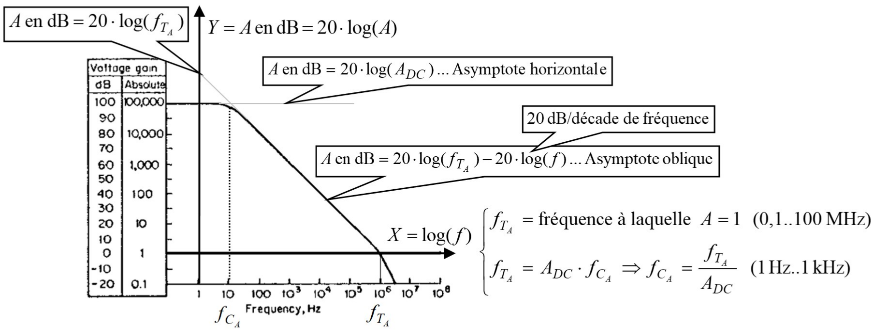
La fonction de transfert idéale d'un système bouclé en contre-réaction est :

$\overline{T_{idéal}} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{B}}$ obtenue dans l'hypothèse d'un gain de l'amplificateur du système (AOp le plus souvent) de valeur infinie ($A = \infty$), donc une tension différentielle $v_d = \dfrac{v_o}{A} = 0$!

En réalité, la fonction de transfert d'un AOp (gain) est :

$$\overline{A} = \frac{A_{DC}}{1 + j \cdot \dfrac{f}{f_{C_A}}} = \begin{cases} \text{en DC} : A = A_{DC} \ (\approx 100000) \\ \text{en AC} : \begin{cases} A = \dfrac{A_{DC}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f}{f_{C_A}}\right)^2}} \\ \phi_A = -arctg\left(\dfrac{f}{f_{C_A}}\right) \end{cases} \end{cases} \quad \text{Si } f > 10 \cdot f_{C_A} : \begin{cases} A \approx \dfrac{\overbrace{A_{DC} \cdot f_{C_A}}^{f_{T_A}}}{f} = \dfrac{f_{T_A}}{f} \\ \phi_A \approx -90° \end{cases}$$ [1]

et le gain d'un ampli op, non seulement n'est pas de valeur infinie en DC, mais s'en éloigne de plus en plus lorsque la fréquence augmente ($A \downarrow$ quand $f \uparrow$) !



En conséquence, la fonction de transfert réelle d'un système bouclé, en contre-réaction, utilisant un ampli op, est donnée par :

$$\overline{T} = \frac{T_{DC}}{1 + j \cdot \dfrac{f}{f_{C_H}}} \quad \text{avec :} \begin{cases} f_{C_H} \approx B \cdot f_{T_A} \\ T_{DC} = \dfrac{T_{idéal}}{1 + \dfrac{1}{A_{DC} \cdot B}} \approx T_{idéal} = \dfrac{\alpha}{B} \quad \left(\text{vrai à } \dfrac{1}{A_{DC} \cdot B} \text{ près}\right) \end{cases}$$

Cette relation est utilisable pour tout « ampli DC », ainsi que pour tout « ampli AC » pour $f >> f_{C_L}$ [2]

[1] Voir pg 1 du document « Doc 8 Synthèse Design montages AOp » dans le dossier « Documents supports du cours » de la section « Ressources » du cours « IND-C1-B3-UE06-Electronique analogique ».

[2] … c.à.d. lorsque les condensateurs de liaisons peuvent être considérés comme de parfaits court-circuits.

Aux fréquences élevées, on observe donc une diminution du module de la fonction de transfert, ainsi qu'un déphasage : $T \approx \dfrac{T_{DC}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_{C_H}}\right)^2}}$ et $\Delta\varphi \approx -arctg\left(\dfrac{f}{f_{C_H}}\right)$

Dans le cas d'un amplificateur $\overline{T}=\overline{G}$ [3] et on a, en module : $G \approx \dfrac{G_{DC}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_{C_H}}\right)^2}}$ et la chute de gain relative de l'amplificateur, aux fréquences élevées, est alors donnée par :

$$\frac{\Delta G}{G}=\frac{G_{DC}-G}{G_{DC}}=1-\frac{G}{G_{DC}}=1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_{C_H}}\right)^2}}$$

ou, en dB : $\underbrace{20\cdot\log(G)}_{G\text{ en dB}} \approx \underbrace{20\cdot\log(G_{DC})}_{G_{DC}\text{ en dB}} - \underbrace{20\cdot\log\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_{C_H}}\right)^2}\right)}_{\text{Chute de gain en dB}}$

$$\Rightarrow \text{Chute de gain en dB} = G_{DC}\ (\text{dB}) - G\ (\text{dB}) = 20\cdot\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{C_H}}\right)^2}\right)$$

Dans le cas d'un **système à plusieurs étages**, on a :

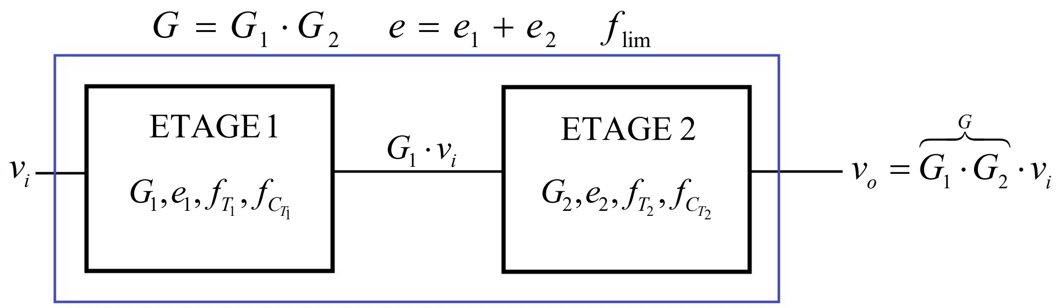
$G = G_1\cdot G_2\cdot G_3\cdot\ldots \quad \Rightarrow \dfrac{\Delta G}{G}=\dfrac{\Delta G_1}{G_1}+\dfrac{\Delta G_2}{G_2}+\dfrac{\Delta G_3}{G_3}+\ldots \quad e=e_1+e_2+e_3+\ldots$ (somme des erreurs partielles)

ou, en dB : $\overbrace{\underbrace{20\cdot\log(G)}_{G_{DC}\ (\text{dB})-\text{Chute } G\ (\text{dB})}}^{G\text{ en dB}} = \overbrace{\underbrace{20\cdot\log(G_1)}_{G_{1_{DC}}\ (\text{dB})-\text{Chute } G_1\ (\text{dB})}}^{G_1\text{ en dB}} + \overbrace{\underbrace{20\cdot\log(G_2)}_{G_{2_{DC}}\ (\text{dB})-\text{Chute } G_2\ (\text{dB})}}^{G_2\text{ en dB}} + \overbrace{\underbrace{20\cdot\log(G_3)}_{G_{3_{DC}}\ (\text{dB})-\text{Chute } G_3\ (\text{dB})}}^{G_3\text{ en dB}} + \ldots$

$$\Rightarrow \text{Chute de gain } G\ (\text{dB}) = \text{Chute de gain } G_1\ (\text{dB}) + \text{Chute de gain } G_2\ (\text{dB}) + \ldots$$

[3] Dans le cas d'un amplificateur la fonction de transfert est un gain (rapport de 2 grandeurs de mêmes natures).

Dimensionnement d'un amplificateur multiétages (exemple dans le cas de 2 étages)



On envisage le cas courant où l'erreur DC est négligeable devant l'erreur AC, soit : $\begin{cases} T_{DC} \approx T_{idéal} \\ e \approx e_{AC} \end{cases}$ [4]

Pour chaque étage, l'erreur commise (chute de gain) lorsqu'on assimile G à sa valeur idéale, lorsque les coefficients α et B sont indépendants de la fréquence dans le domaine fréquentiel proche ($f > f_{C_T}/10$) de la limite en fréquence f_{C_T}, est donnée par : $e_{AC} \approx 0{,}45 \cdot \left(\frac{f}{f_{C_T}} \right)^2$ qui est maximale à

$f = f_{\lim} \quad \Rightarrow f_{\lim} = k \cdot f_{c_T}$ avec : $f_{c_T} = B \cdot f_T$ et $k = \frac{f_{\lim}}{f_{C_T}} \approx 1{,}5 \cdot \sqrt{e_{AC}}$

Dans le cas d'un montage à 2 étages, on a :

$$e_{AC} = e_{AC_1} + e_{AC_2} = 0{,}45 \cdot \left(\frac{f^2}{f_{C_{T_1}}^2} + \frac{f^2}{f_{C_{T_2}}^2} \right) = 0{,}45 \cdot \left(\frac{1}{f_{C_{T_1}}^2} + \frac{1}{f_{C_{T_2}}^2} \right) \cdot f^2 \quad [5]$$

La fréquence limite est atteinte lorsque $e_{AC} = e_{AC_{\max}} = 0{,}45 \cdot \left(k_1^2 + k_2^2\right) = 0{,}45 \cdot \left(\frac{1}{f_{C_{T_1}}^2} + \frac{1}{f_{C_{T_2}}^2} \right) \cdot f_{\lim}^2$

$$\Rightarrow f_{\lim} = 1{,}5 \cdot \sqrt{\frac{e_{AC_{\max}}}{\frac{1}{f_{C_{T_1}}^2} + \frac{1}{f_{C_{T_2}}^2}}}$$

[4] Dans le cas contraire, la résolution est complexe par le fait que e_{DC} dépend également de G_1 et G_2.
[5] La fréquence des signaux est évidemment la même dans tout le montage, puisqu'elle est imposée par v_i.

1ière solution de dimensionnement : optimisation du produit « Gain – Bande passante »

Le meilleur compromis « Gain – Bande passante » est obtenu lorsque $f_{C_{T_1}} = f_{C_{T_2}} = f_{C_{T_3}} = \ldots$ car on « rejette » alors le début de l'atténuation significative au maximum vers les hautes fréquences. [6]

Cette solution optimise la valeur de la **grandeur recherchée** ($e_{AC} \to$ min, $G \to$ max, $f_{limite} \to$ max, $f_T \to$ min)

Dans cette solution, les erreurs partielles e_{AC_1} et e_{AC_2} sont égales car $f_{C_{T_1}} = f_{C_{T_2}} \Rightarrow k_1 = k_2$

Rem. : si $f_{T_1} = f_{T_2}$, on a : $B_1 = B_2$ (même taux de réaction pour les 2 étages)

Taux de réaction et gain de chaque étage sont inversement liés : par exemple, pour un amplificateur non-inverseur, on a $B = \dfrac{1}{G}$ et pour un amplificateur inverseur, on a $B = \dfrac{1}{1+G}$. Par conséquent, toute augmentation de la valeur du gain d'un étage réduit son taux de réaction, et donc sa fréquence de coupure puisque $f_{c_T} = B \cdot f_T$, et vice-versa.

Les gains partiels (gains des différents étages) sont reliés par le gain global car $G = G_1 \cdot G_2$. Par conséquent, toute augmentation du gain d'un étage entraîne une diminution du gain de l'autre étage.

En conséquence, on va montrer que le « produit Gain-Bande passante ($G \cdot f_{\text{limite}}$) » est maximisé lorsque l'on impose $f_{C_{T_1}} = f_{C_{T_2}}$. Appelons $f_{C_{T_e}}$ la valeur des $f_{C_{T_i}}$ dans ce cas d'égalité des $f_{C_{T_i}}$.

En effet, si $f_{C_{T_1}} \neq f_{C_{T_2}}$, l'une de ces deux fréquences de coupure est alors inférieure à $f_{C_{T_e}}$, tandis que l'autre en est supérieure … En conséquence, la fréquence de coupure la plus faible provoque une chute prématurée du gain … et la fonction de transfert globale va donc atteindre la chute de gain tolérée à une fréquence plus faible que celle que l'on aurait eu dans le cas $f_{C_{T_1}} = f_{C_{T_2}} = f_{C_{T_e}}$.

Dans le cas $f_{C_{T_1}} = f_{C_{T_2}} = f_{C_{T_e}}$, les réponses fréquentielles de chaque étage restent « horizontales » pour de plus hautes fréquences et « plongent » aux mêmes fréquences, ce qui maintient ainsi la réponse fréquentielle globale « horizontale » jusqu'à de plus hautes fréquences que dans le cas $f_{C_{T_1}} \neq f_{C_{T_2}}$.

[6] Dans le cas contraire, comme les fréquences de coupure des gains partiels dépendent de la valeur de ces gains, lesquels sont reliés par le gain global, la fréquence de coupure la plus faible est de valeur plus faible que celle obtenue dans le cas de l'égalité des fréquences de coupure des gains partiels et, cette fréquence de coupure la plus faible provoque ainsi une chute prématurée du gain.

2ième solution de dimensionnement : maximiser la valeur de G_1 à une tolérance fixée ($e_{AC} = e_{AC_{\max}}$)

Cette solution est intéressante si l'on désire privilégier la réduction de l'influence des parasites, en imposant un gain G_1 suffisant au premier étage [7] (*Parmi les 2 solutions de l'équation, on choisira donc la solution dont la valeur de G_1 est la plus élevée*).

Dans cette solution, les erreurs partielles e_{AC_1} et e_{AC_2} sont différentes car $f_{C_{T_1}} \neq f_{C_{T_2}} \Rightarrow k_1 \neq k_2$

- Partir de : $e_{AC_{\max}} = 0{,}45 \cdot \left(\dfrac{1}{f_{C_{T_1}}^2} + \dfrac{1}{f_{C_{T_2}}^2} \right) \cdot f_{\lim}^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e_{AC_{\max}}}{0{,}45 \cdot f_{\lim}^2} = \dfrac{1}{B_1^2 \cdot f_{T_1}^2} + \dfrac{1}{B_2^2 \cdot f_{T_2}^2}$

- Exprimer B_1 en fonction de G_1 et B_2 en fonction de $G_2 = \dfrac{G}{G_1}$

- Résoudre l'équation du second degré obtenue (*Parmi les 2 solutions de l'équation, on choisira la solution dont la valeur de G_1 est la plus élevée*)

[7] Les bruits d'un circuit se « greffent » à tout endroit de celui-ci (autant les bruits d'origine externe au circuit que les bruits internes des composants). Pour y faire face, il faut faire en sorte que le « rapport signal/bruit » soit suffisant, en veillant à avoir un signal « utile » suffisamment supérieur aux bruits. Pour y parvenir, il faut d'une part, réduire l'amplitude des bruits (« règles de bonnes pratiques », blindages et choix éventuel de composants à plus faibles bruits) et, d'autre part, amplifier le signal « utile » suffisamment et ce, le plus « rapidement » possible pour que les bruits soient plus négligeables dans la suite du circuit (ce qui revient indirectement à réduire le niveau de bruit), … ce qui justifie cette solution de dimensionnement.