

MATHÉMATIQUES AU SERVICE DE L'INGÉNIEUR

HELMo GRAMME

Analyse avancée

Jérôme Walmag

16 janvier 2024

Avant-propos

La collection *Mathématiques au service de l'ingénieur* trouve son origine dans l'approche intégrée développée par Pierre Lousberg, Docteur en Sciences Mathématiques, qui fut chargé de cours pendant de nombreuses années avant de prendre la fonction de directeur d'HELMo Gramme de 2014 à 2019. Cet avant-propos est un hommage à cet héritage qui reprend donc en grande partie ses mots et ses intuitions pédagogiques.

Les ouvrages de cette collection sont régulièrement remis à jour par les enseignantes et enseignants titulaires des cours et constituent le support de la formation mathématique des ingénieures et ingénieurs industriels de HELMo Gramme.

En accord avec la devise de l'école « *Savoir pour servir* », l'enseignement des mathématiques est destiné à être *au service* des cours scientifiques qui les utilisent. Les concepts théoriques sont donc, le plus souvent possible, illustrés par des exemples empruntés à d'autres disciplines et certains exercices se rapportent à des situations concrètes rencontrées dans d'autres cours. L'approche se veut progressive, en introduisant les concepts au moment où les cours en question en ont le plus besoin. Elle se veut aussi pratique en développant les méthodes numériques en parallèle des méthodes analytiques classiques.

D'autre part, les manuels de cette collection se veulent être *au service* des étudiantes et des étudiants. Ainsi, seules les notions théoriques jugées essentielles à leur formation ont été abordées, avec une volonté de concrétisation et d'efficacité, en les illustrant par des exemples et en les dépouillant de développements inutiles ou trop abstraits. Dans le souci d'être complet, certaines démonstrations ont été maintenues, bien qu'elles ne soient pas vues au cours, ceci afin de permettre à l'utilisateur ou l'utilisatrice qui le souhaite d'approfondir ses connaissances théoriques. En outre, chaque chapitre propose une liste d'exercices variés avec leurs solutions et de nombreux exemples mettent en évidence les modes de raisonnement et les méthodes de résolution les plus couramment utilisés.

Nous espérons que cet ouvrage apportera une aide efficace à toute étudiante ou tout étudiant ayant la volonté de maîtriser les concepts mathématiques indispensables à sa formation.

L'équipe des enseignantes et enseignants en mathématiques de HELMo Gramme.

Chapitre 1

Les séries de Fourier

Les fonctions périodiques jouent un rôle important dans la description de nombreux phénomènes périodiques (signaux lumineux, signaux sonores, vibrations . . .).

Il est naturel de vouloir représenter une fonction périodique par une série dont les différents termes sont constitués des fonctions périodiques élémentaires telles que sinus et cosinus. De telles séries sont appelées *séries de Fourier* (ou séries *trigonométriques*).

1.1 Notions préliminaires

1.1.1 Séries convergentes

Nous allons faire un usage abondant de la notion de *série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k. \quad (1.1)$$

Celle-ci se définit comme la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^N x_k$ dont on prend la limite pour N tendant vers l'infini, à condition que celle-ci existe. Les éléments de la suite x_n ne sont pas nécessairement des nombres, ils peuvent être des fonctions, des vecteurs ou des matrices.

Définition 1.1 (Série). *La série correspondant à la suite $\{x_k\}$, pour $k \in \mathbb{N}$, s'écrit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_k, \quad (1.2)$$

à condition que la limite existe et soit bornée. On dit que la série est convergente.

Exemple 1.2. *La notation $\sum_{k=1}^{\infty} k$ est impropre dans le cadre de cette définition, car la suite des sommes partielles des entiers naturels ne tend pas vers une valeur bornée*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N k = \infty. \quad (1.3)$$

On dit que la série est divergente.

Pour qu'une série converge, il est nécessaire que le terme général x_n tende vers zéro, mais ça n'est pas une condition suffisante, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 1.3 (Série harmonique). *On peut montrer que la série*

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \quad (1.4)$$

est une série divergente.

Exemple 1.4. *Par contre, on peut montrer que la somme des inverses des carrés des entiers naturels est convergente*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1.5)$$

Des critères existent pour déterminer si une série est convergente ou non et des techniques permettent le calcul des limites envisagées, mais tous deux sortent du cadre de ce cours.

Dans la suite, nous supposerons que les séries évoquées sont convergentes.

1.1.2 Fonctions de carré intégrable

On peut prouver que les fonctions périodiques dont le carré est intégrable sont toujours développables en une série de Fourier convergente.

Définition 1.5 (Fonction de carré intégrable). *Une fonction f est de carré intégrable sur un intervalle $]a, b[$ et on écrit*

$$f \in L_2(]a, b[) \quad (1.6)$$

si elle est mesurable sur cet intervalle avec $|f|^2 \in L_1(]a, b[$.

Lorsque $]a, b[$ est borné, une fonction de carré intégrable sur $]a, b[$ est aussi intégrable sur $]a, b[$. Cela résulte de la majoration

$$|f| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + 1), \quad (1.7)$$

mais la réciproque est fautive. En guise de contre-exemple, la fonction $\frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ mais son carré ne l'est pas.

Sauf mention du contraire, nous supposerons, tout au long de ce chapitre que les fonctions envisagées sont de carré intégrable.

1.1.3 Fonctions périodiques

Dans ce chapitre, nous utiliserons la variable t pour la variable indépendante d'une fonction $f(t)$, car il est très commun que cette variable soit le temps.

Définition 1.6 (Fonction périodique). *Une fonction $f(t)$ définie sur \mathbb{R} est périodique s'il existe une constante $T > 0$ telle que*

$$f(t + T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

La période de f est la plus petite des constantes T satisfaisant à cette condition.

Pour rappel, les fonctions périodiques ont les propriétés suivantes.

Proposition 1.7. *Si f est une fonction périodique de période T , alors*

$$f(t + kT) = f(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.9)$$

Proposition 1.8. *Si f est une fonction périodique de période T , alors*

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt. \quad (1.10)$$

Proposition 1.9. *Si f est une fonction périodique de période T , alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}_0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction $f(\alpha t + \beta)$ est périodique de période $\frac{T}{|\alpha|}$.*

Une fonction périodique f de période T peut être engendrée par une fonction *motif* (voir figure 1.1),

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [C, C + T[\\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases} \quad (1.11)$$

avec C désignant une constante réelle arbitraire.

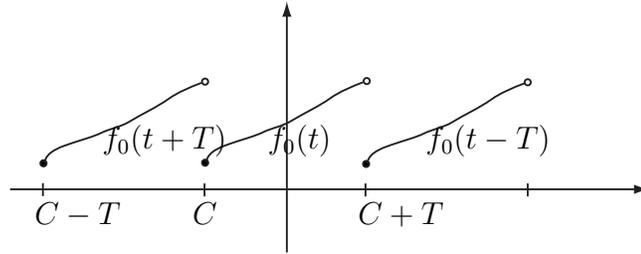


FIGURE 1.1 – Fonction périodique de période T engendrée par une fonction motif.

On peut écrire

$$\begin{aligned} f(t) = f_0(t) &+ f_0(t - T) + f_0(t - 2T) + \dots \\ &+ f_0(t + T) + f_0(t + 2T) + \dots, \end{aligned} \quad (1.12)$$

soit

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_0(t - kT), \quad (1.13)$$

la convergence de cette série étant assurée dans \mathbb{R} car en tout réel t , tous les termes sont nuls à l'exclusion d'un seul.

On dit que f_0 représente le *motif* de f dans l'intervalle $[C, C + T[$. Le choix de cet intervalle n'a guère d'importance; sauf mention explicite du contraire, nous prendrons un intervalle du type $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$.

Définition 1.10 (Fonctions harmoniques). *Les fonctions à valeurs complexes de la forme*

$$ce^{j\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

avec $c \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}_0^+$. Il s'agit d'une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, et de fréquence

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.15)$$

Le réel positif ω est appelé *pulsation* et parfois *fréquence* par abus de langage car ω est proportionnel à ν :

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.16)$$

En écrivant le nombre complexe c en représentation trigonométrique $c = Ae^{j\phi_o}$ avec $A > 0$, la fonction harmonique s'écrit

$$f(t) = Ae^{j\phi_o}e^{j\omega t} = Ae^{j(\omega t + \phi_o)}. \quad (1.17)$$

Sous cette forme, A est appelée l'*amplitude* de l'harmonique, tandis que ϕ_o est la *phase*. Dans le plan complexe, $f(t)$ décrit une trajectoire circulaire de rayon A à la vitesse angulaire ω .

Les parties réelle et imaginaire d'une fonction harmonique

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(t) &= A \cos(\omega t + \phi_o) \\ \mathcal{I}f(t) &= A \sin(\omega t + \phi_o) \end{aligned}$$

constituent des fonctions *cisoïdales*.

1.1.4 Conditions de Dirichlet

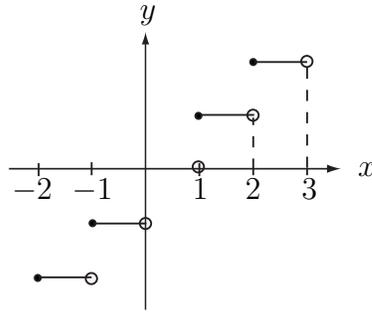
En pratique, d'autres hypothèses peu contraignantes, connues sous le nom de *conditions de Dirichlet* sont encore nécessaires.

Continuité par morceaux

La fonction $f(t)$ est *continue par morceaux* dans l'intervalle compact $[a, b]$ si f est continue en tout point de $[a, b]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points t_i ($i = 1, \dots, p$) en lesquels f possède des limites à gauche et à droite finies.¹ Ces points sont des *discontinuités de première espèce* de f . Une fonction admettant une asymptote verticale en un point de l'intervalle n'est donc pas continue par morceaux dans cet intervalle. Une fonction est dite continue par morceaux dans \mathbb{R} si elle est continue par morceaux dans tout intervalle fermé borné.

Exemple 1.11. *La fonction PE(t) représentant la partie entière de t, c'est-à-dire le plus grand entier plus petit ou égal à t (figure 1.2), est continue par morceaux dans \mathbb{R} .*

1. Si $t_1 = a$ (resp. $t_p = b$), on exige $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) \in \mathbb{R}$ (resp. $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t) \in \mathbb{R}$).

FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction *partie entière* PE, continue par morceaux sur \mathbb{R} .

Exemple 1.12. La fonction $f(t) = \operatorname{tgt}$ n'est pas continue par morceaux dans \mathbb{R} car elle est discontinue aux points $t = k\pi + \frac{\pi}{2}$ avec

$$\lim_{t \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \operatorname{tgt} = \infty. \quad (1.18)$$

De même, la fonction $f(t) = \sin \frac{1}{t}$ n'est pas continue par morceaux dans \mathbb{R} car

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{1}{t} \quad (1.19)$$

n'existe pas.

Bien entendu, la somme et le produit de fonctions continues par morceaux sont également continues par morceaux.

Continue dérivabilité par morceaux

La fonction $f(t)$ est *continument dérivable par morceaux* dans l'intervalle $[a, b]$ si f et f' sont continues par morceaux dans $[a, b]$. La fonction $f(t)$ est *continument dérivable par morceaux* dans \mathbb{R} si f est continument dérivable par morceaux dans tout intervalle fermé borné.

Une fonction présentant une asymptote verticale, un point d'inflexion à tangente verticale ou un point de rebroussement dans l'intervalle n'est pas continument dérivable par morceaux sur cet intervalle.

Exemple 1.13. La fonction $f(t)$ dont le graphe est représenté sur la figure 1.3 est continument dérivable par morceaux dans $[a, b]$.

D'une part, f est discontinue aux points t_2, t_3 en lesquels f possède des limites à gauche et à droite finies.

D'autre part, f n'est pas dérivable en t_1, t_2, t_3 avec

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} f'(t) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_i^+} f'(t) \in \mathbb{R}, \quad (1.20)$$

quel que soit $i = 1, 2, 3$.

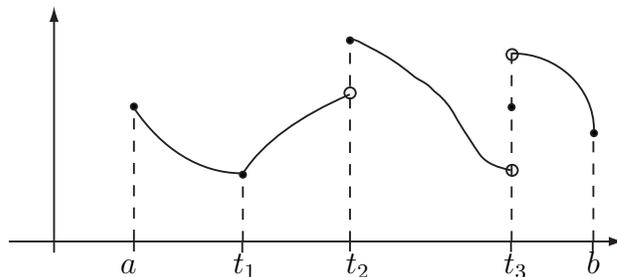


FIGURE 1.3 – Fonction continument dérivable par morceaux.

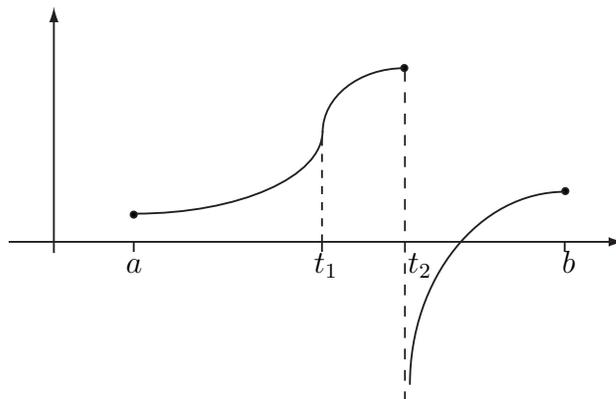
Exemple 1.14. Les fonctions dont les graphes sont représentés sur les figures 1.4 et 1.5 ne sont pas continument dérivables par morceaux.

Pour la première fonction f_1 , on a

$$\lim_{t \rightarrow t_1} f_1'(t) = \infty, \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_2^+} f_1(t) = -\infty. \quad (1.21)$$

Pour la seconde fonction f_2 , on a

$$\lim_{t \rightarrow t_1^+} f_2'(t) = -\infty. \quad (1.22)$$

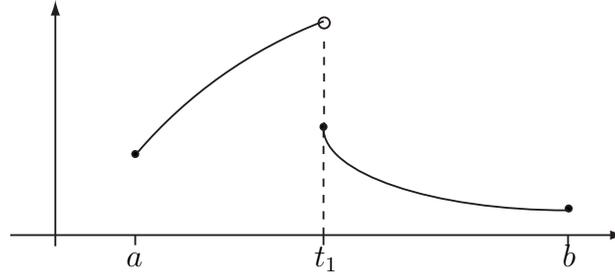
FIGURE 1.4 – Graphe de la fonction f_1 , non continument dérivable par morceaux sur $[a, b]$.

1.2 Séries et coefficients de Fourier

1.2.1 Définition

Si on considère une fonction $f \in L_2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ périodique de période T , on peut la décomposer en un *développement en série complexe de Fourier*

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k} e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1.23)$$

FIGURE 1.5 – Graphe de la fonction f_2 , non continument dérivable par morceaux sur $[a, b]$.

où on a posé la *fréquence fondamentale*²

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.24)$$

où les $\alpha_k \in \mathbb{C}$ sont les *coefficients de Fourier complexes* de f .

On dispose d'une condition suffisante pour développer une fonction périodique en série de Fourier. Elle fait l'objet du théorème suivant que nous accepterons sans démonstration.

Proposition 1.15 (Théorème de Dirichlet). *Si f est une fonction périodique de période T continument dérivable par morceaux dans \mathbb{R} , alors sa série de Fourier converge en tout point $t \in \mathbb{R}$ et on a*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} = f(t), \quad (1.25)$$

sauf aux points t_i où f est discontinue, dans ce cas

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t_i} = \frac{f(t_i^-) + f(t_i^+)}{2}. \quad (1.26)$$

Définition 1.16 (Signal). *En vue d'alléger les écritures, on convient d'appeler un signal analogique³ la fonction*

$$f_s(t) = \begin{cases} f(t), & \forall t \in \text{dom}_c f, \\ \frac{1}{2} [f(t^-) + f(t^+)], & \forall t \notin \text{dom}_c f. \end{cases} \quad (1.27)$$

Ce nouveau signal $f_s(t)$, que nous renommerons immédiatement $f(t)$ est égal presque partout à la fonction initiale et ne modifie pratiquement rien de ses caractéristiques, ni de son traitement. En particulier, les coefficients de Fourier restent inchangés.

2. Ce que nous appelons *fréquence* dans la suite du texte est en réalité une *pulsation* égale à 2π fois la véritable fréquence. À noter également que la dimension de ω_0 et t sont toujours inverse l'une de l'autre, de sorte que $\omega_0 t$ est bien sans dimension pour servir d'argument à l'exponentielle imaginaire.

3. Quand aucune confusion n'est possible, nous parlerons simplement de *signal*.

1.2.2 Coefficients complexes de Fourier

En supposant que la série (1.23) est intégrable terme à terme sur tout intervalle de longueur T du type $I = [C, C + T]$, il vient si $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_C^{C+T} e^{-jm\omega_0 t} f(t) dt &= \frac{1}{T} \int_C^{C+T} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j(k-m)\omega_0 t} dt \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \int_C^{C+T} \frac{e^{j(k-m)\omega_0 t}}{T} dt. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Puisque

$$\int_C^{C+T} \frac{e^{j(k-m)\omega_0 t}}{T} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m, \\ \frac{e^{j(k-m)\omega_0 C}}{j(k-m)\omega_0 T} [e^{j(k-m)\omega_0 T} - 1] = 0 & \text{si } k \neq m. \end{cases} \quad (1.29)$$

Cette dernière expression est effectivement nulle car $e^{jn2\pi} = 1$, si $n \in \mathbb{Z}$, or on a

$$\omega_0 T = 2\pi \quad \text{et} \quad k - m \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent,

$$\alpha_m = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.30)$$

On observe donc que les coefficients α_k sont uniques et le développement d'un signal f en série de Fourier de f est donc unique. Chaque terme de la série est un signal harmonique de période

$$T_k = \frac{2\pi}{k\omega_0} = \frac{T}{k} \quad (1.31)$$

donc de fréquence

$$2\pi \frac{k}{T} = k\omega_0. \quad (1.32)$$

Il ressort de la proposition 1.15 qu'un signal périodique $f(t)$ est complètement déterminé, par les coefficients α_k . On note parfois simplement

$$f(t) \leftrightarrow \alpha_k \quad (1.33)$$

en lieu et place de (1.23).

Comme le coefficient α_k multiplie la fonction $e^{jk\omega_0 t}$ de fréquence $k\omega_0$, il représente le *poids* de la fonction de fréquence $k\omega_0$ intervenant dans le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$. On dit que les coefficients de Fourier décrivent la fonction $f(t)$ dans le *domaine fréquentiel*, tandis que la fonction $f(t)$ se situe dans le *domaine temporel*.

Leur ensemble

$$\{\alpha_k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \quad (1.34)$$

constitue le *spectre* de la fonction f . Il s'agit d'un *spectre discret* car k ne prend que des valeurs entières. Le spectre de f est complètement déterminé par le *spectre des modules*

$$\{|\alpha_k|, \quad k \in \mathbb{Z}\} \quad (1.35)$$

et le spectre des arguments

$$\{\arg \alpha_k, k \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.36)$$

La fonction *argument* $\arg x$ de la variable complexe x donne la valeur de l'angle par rapport à la demi-droite positive de l'axe réel de la représentation polaire de x dans le plan complexe. La valeur de la fonction argument est généralement définie telle que $\arg x \in]-\pi, \pi]$.

Le théorème suivant est très important, il nous permet de *tronquer* les séries de Fourier et de ne garder en pratique qu'un nombre fini d'harmoniques car les modules de celles-ci deviennent négligeables à partir d'un certain rang.

Proposition 1.17 (Spectre des modules). *Les coefficients de Fourier tendent vers 0 si $k \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Montrons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0. \quad (1.37)$$

On a

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (1.38)$$

Dès lors, en supposant que f est continument dérivable dans $]C, C+T[$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \left(\frac{j}{k\omega_0} [f(t) e^{-jk\omega_0 t}]_C^{C+T} - \frac{j}{k\omega_0} \int_C^{C+T} f'(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right). \quad (1.39)$$

Le crochet étant nul puisque $f(t) e^{-jk\omega_0 t}$ est périodique de période T , il vient

$$\alpha_k = \frac{-j}{k\omega_0 T} \int_C^{C+T} f'(t) e^{-jk\omega_0 t} dt; \quad (1.40)$$

d'où

$$|\alpha_k| \leq \frac{1}{\omega_0 T} \left(\int_C^{C+T} |f'(t)| dt \right) \frac{1}{|k|}. \quad (1.41)$$

Il en résulte que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0. \quad (1.42)$$

□

1.2.3 Série réelle de Fourier

En posant

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \quad (1.43)$$

$$\alpha_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.44)$$

$$\alpha_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.45)$$

on a

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.46)$$

$$b_k = j(\alpha_k - \alpha_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.47)$$

où $a_k, b_k \in \mathbb{C}$.

Avec ces notations, et en utilisant la formule d'Euler

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t), \quad (1.48)$$

la série complexe de Fourier (1.23) peut s'écrire sous la forme

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - jb_k}{2} [\cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + jb_k}{2} [\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)]$$

puis

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)). \quad (1.49)$$

Cette dernière expression est le *développement réel en série de Fourier* de f . Les coefficients a_k, b_k sont les *coefficients réels*⁴ de Fourier de f .

Chaque terme du type

$$u_k(t) = a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = \alpha_k e^{jk\omega_0 t} + \alpha_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \quad (1.50)$$

constitue un *mode de Fourier d'amplitude*

$$A_k = \sqrt{|a_k|^2 + |b_k|^2} \quad (1.51)$$

puisque

$$\begin{aligned} |u_k(t)| &\leq |a_k| |\cos(k\omega_0 t)| + |b_k| |\sin(k\omega_0 t)| \\ &\leq \sqrt{|a_k|^2 + |b_k|^2} \sqrt{\cos^2(k\omega_0 t) + \sin^2(k\omega_0 t)} = \sqrt{|a_k|^2 + |b_k|^2}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Le mode $k = 1$ est celui de plus grande période T ; on l'appelle le *mode fondamental*. Les autres modes sont les *harmoniques* de rang k . Les fréquences des harmoniques sont des multiples de la fréquence fondamentale ω_0 .

Les coefficients a_k et b_k peuvent être obtenus directement à partir de f à l'aide des formules (1.30) et (1.46). Ainsi, on a

$$\begin{aligned} a_k &= \alpha_k + \alpha_{-k} = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} f(t) (e^{-jk\omega_0 t} + e^{jk\omega_0 t}) dt, \\ &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.53)$$

tandis que (1.47) donne

$$\begin{aligned} b_k &= j(\alpha_k - \alpha_{-k}) = \frac{j}{T} \int_C^{C+T} f(t) (e^{-jk\omega_0 t} - e^{jk\omega_0 t}) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

4. Les coefficients a_k et b_k sont véritablement des nombres réels si et seulement si le signal f est lui-même réel, voir section 1.2.4.

Notons que

$$f_{\text{moy}} = \alpha_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} f(t) dt \quad (1.55)$$

représente la valeur moyenne de f sur une période.

D'autre part, les intégrales apparaissant dans les formules (1.30), (1.53), (1.54) sont indépendantes de l'intervalle d'intégration pourvu que celui-ci ait une longueur égale à T puisque les fonctions à intégrer sont périodiques de période T . On prend généralement un intervalle d'intégration du type $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ correspondant à $C = -\frac{T}{2}$.

En utilisant les relations (1.44) et (1.45) dans la proposition 1.17, on constate que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0, \quad (1.56)$$

de sorte que les amplitudes des harmoniques sous cette forme deviennent également négligeables à partir d'un certain rang. Les séries réelles peuvent donc également être tronquées.

1.2.4 Développement en série de Fourier d'un signal réel

Si le signal f est réel, les coefficients a_k et b_k sont véritablement réels et, au vu des formules (1.44) et (1.45), on a

$$\alpha_k = \overline{\alpha_{-k}}, \quad (1.57)$$

$$a_k = 2 \mathcal{R}\alpha_k, \quad (1.58)$$

$$b_k = -2 \mathcal{I}\alpha_k, \quad (1.59)$$

pour $k \in \mathbb{N}_0$.

On peut dès lors écrire les modes de Fourier sous la forme

$$u_k(t) = a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = \alpha_k e^{jk\omega_0 t} + \overline{\alpha_k} e^{-jk\omega_0 t} = A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k) \quad (1.60)$$

où A_k et φ_k sont les coordonnées polaires du point (a_k, b_k) dans \mathbb{R}^2 :

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (1.61)$$

$$\text{tg}\varphi_k = \frac{b_k}{a_k}. \quad (1.62)$$

A_k est l'amplitude du mode k et φ_k est sa *phase*.

On définit aussi le *spectre d'amplitudes*

$$\{A_k, k \in \mathbb{N}\} \quad (1.63)$$

avec $A_0 = \frac{a_0}{2}$ et le *spectre de phases*

$$\{\varphi_k, k \in \mathbb{N}\} \quad (1.64)$$

avec $\varphi_0 = \arg a_0$.

Les spectres complexes et réels peuvent être reliés⁵ à l'aide de (1.46), (1.47) et (1.57) :

$$\begin{aligned} A_k &= \sqrt{(\alpha_k + \overline{\alpha_k})^2 + j^2(\alpha_k - \overline{\alpha_k})^2} \\ &= \sqrt{4\alpha_k \overline{\alpha_k}} \\ &= 2|\alpha_k| \end{aligned} \quad (1.65)$$

et

$$\varphi_k = \arg \overline{\alpha_k} = -\arg \alpha_k. \quad (1.66)$$

Si la fonction f est réelle, on déduit de la formule (1.57)

$$|\alpha_{-k}| = |\alpha_k|, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.67)$$

le spectre des modules est pair, c'est-à-dire symétrique par rapport à l'axe vertical. D'autre part, on a la relation

$$\arg \alpha_{-k} = -\arg \alpha_k \quad (1.68)$$

qui montre que le spectre des arguments est impair, c'est-à-dire symétrique par rapport à l'origine du repère.

Signal pair

Si le signal $f(t)$ est *pair*, la formule (1.53) devient

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.69)$$

puisque la fonction à intégrer est paire, tandis qu'on a $b_k = 0$ pour $k \in \mathbb{N}_0$ vu que la fonction (1.54) à intégrer est impaire.

Il s'ensuit qu'un signal pair est développable en une série de cosinus

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t). \quad (1.70)$$

Les coefficients complexes de cette série sont

$$\alpha_k = \frac{a_k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.71)$$

car la formule (1.53) montre que $a_{-k} = a_k$.

En particulier, si le signal $f(t)$ est pair et réel, les coefficients α_k sont des nombres réels.

5. Par abus de langage, en raison de leurs étroites relations, le spectre des modules est parfois nommé spectre des amplitudes (complexes), tandis que le spectre des arguments est parfois nommé spectre des phases (complexes).

Signal impair

Si le signal $f(t)$ est *impair*, la formule (1.54) devient

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (1.72)$$

puisque la fonction à intégrer est paire, tandis que $a_k = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$ vu que la fonction (1.53) à intégrer est impaire. Il s'ensuit qu'un signal impair est développable en une série de sinus

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t). \quad (1.73)$$

Les coefficients complexes de cette série sont

$$\alpha_k = -\frac{j}{2} b_k, \quad k \in \mathbb{Z}_0 \quad (1.74)$$

car il ressort de la formule (1.54) que $b_{-k} = -b_k$.

En particulier, si le signal $f(t)$ est impair et réel, les coefficients α_k sont des nombres imaginaires purs.

1.3 Séries de Fourier de signaux usuels

En guise d'application, étudions quelques signaux connus.

1.3.1 Signal en dents de scie

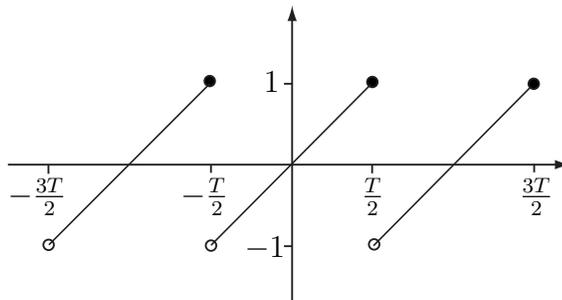


FIGURE 1.6 – Fonction en dents de scie $\text{sci}_T(t)$ de période T .

La fonction en dents de scie (voir figure 1.6), périodique de période T est définie dans l'intervalle $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ par le motif

$$\text{sci}_T(t) = \frac{2t}{T}. \quad (1.75)$$

À noter que pour en faire un *signal*, il faut redéfinir la valeur aux points $t = \frac{T}{2} + kT$, pour $k \in \mathbb{Z}$ de sorte que

$$\text{sci}_T\left(\frac{T}{2} + kT\right) = \frac{\text{sci}_T\left(\left(\frac{T}{2} + kT\right)^-\right) + \text{sci}_T\left(\left(\frac{T}{2} + kT\right)^+\right)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0, \quad (1.76)$$

mais ça ne change rien aux calculs des coefficients de Fourier.

Ce signal vérifie les conditions de Dirichlet, il est réel et impair, de sorte qu'on peut le développer en une série de sinus à l'aide de la formule (1.72)

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \text{sci}_T(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{8}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t \sin(k\omega_0 t) dt \\ &= \frac{8}{T^2} \left[-\frac{t \cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{8}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0} dt \\ &= \frac{8}{T^2} \left(-\frac{T}{2k\omega_0} \cos(k\pi) \right) + \frac{8}{T^2} \left[\frac{\sin(k\omega_0 t)}{k^2 \omega_0^2} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{4}{k\omega_0 T} \cos(k\pi) + \frac{8}{T^2} \frac{\sin(k\pi)}{k^2 \omega_0^2} = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

en tenant bien compte de (1.24).

La série réelle de Fourier du signal en dents de scie s'écrit donc

$$\text{sci}_T(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(k\omega_0 t). \quad (1.78)$$

On vérifiera également que, en $t = \frac{T}{2}$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\omega_0 \frac{T}{2}\right) = 0, \quad (1.79)$$

comme annoncé dans la définition du signal (1.75). Les sommes partielles de la série de Fourier obtenue dans ce cas présentent des oscillations importantes au voisinage des points de discontinuité dont l'amplitude dépend du saut du signal. Bien que ces oscillations se concentrent de plus en plus près des points de discontinuité au fur et à mesure que le nombre de termes pris en compte grandit, elles ne disparaissent jamais complètement. Ce comportement est appelé *phénomène de Gibbs*. Pour éviter ce phénomène, on essaye généralement de privilégier des signaux continus.

En utilisant (1.74), on obtient

$$\alpha_k = -\frac{j}{2} b_k = \frac{(-1)^k}{k\pi} j, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0, \quad (1.80)$$

et la version complexe de cette série s'écrit

$$\text{sci}_T(t) = \frac{j}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{jk\omega_0 t}. \quad (1.81)$$

Comme

$$|\alpha_k| = \frac{1}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0 \quad (1.82)$$

et

$$\arg \alpha_k = \arg \frac{j(-1)^k}{\pi k} = \arg \left(e^{j\frac{\pi}{2}} (e^{-j\pi})^k \right) = \arg e^{j(\frac{\pi}{2} - k\pi)} = (-1)^k \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0, \quad (1.83)$$

on peut présenter les spectres des modules et des arguments sur des graphes discrets sur les figures 1.7 et 1.8. Pour insister sur le fait que α_k est le coefficient du terme de fréquence $k\omega_0$, on portera $k\omega_0$ au lieu de k sur l'axe des abscisses. En outre, on observera que $\arg \alpha_0$ n'est pas défini.

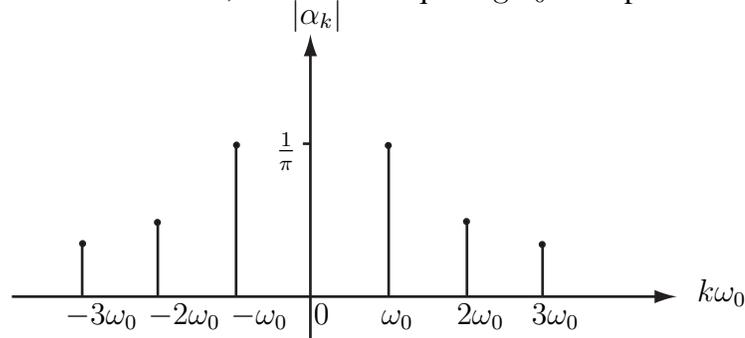


FIGURE 1.7 – Spectre des modules de $\text{sci}_T(t)$, on remarque que celui-ci est pair.

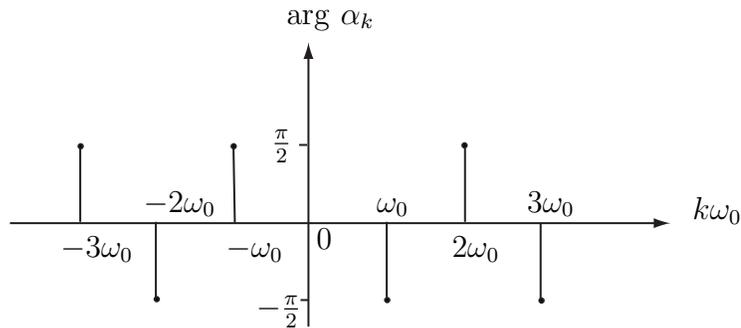


FIGURE 1.8 – Spectre des arguments de $\text{sci}_T(t)$, on remarque que celui-ci est impair.

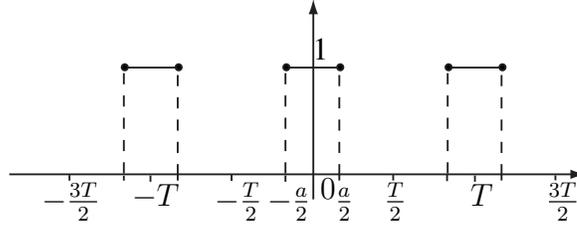
1.3.2 Signal rectangulaire périodique

Le signal rectangulaire périodique (voir figure 1.9) est le signal périodique de largeur $0 < a < T$ et de période $T > 0$ dont la restriction à $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ est donnée par

$$\text{rect}_{a,T}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{a}{2} < |t| \leq \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (1.84)$$

À noter que pour en faire un *signal*, il faut redéfinir la valeur aux points $t = \frac{|a|}{2}$, de sorte que

$$\text{rect}_{a,T}\left(\frac{|a|}{2}\right) = \frac{\text{rect}_{a,T}\left(\frac{|a|^-}{2}\right) + \text{rect}_{a,T}\left(\frac{|a|^+}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}, \quad (1.85)$$

FIGURE 1.9 – Fonction périodique rectangulaire $\text{rect}_{a,T}(t)$ de largeur a et de période T .

mais ça ne change rien aux calculs des coefficients de Fourier.

Ce signal vérifie les conditions de Dirichlet, il est réel et pair, de sorte qu'on peut le développer en une série de cosinus à l'aide de la formule (1.69)

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \text{rect}_{a,T}(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{a}{2}} dt = \frac{2a}{T} = \frac{\omega_0 a}{\pi} \quad (1.86)$$

et, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \text{rect}_{a,T}(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{a}{2}} \cos(k\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4}{kT\omega_0} [\sin(k\omega_0 t)]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{4}{kT\omega_0} \sin \frac{k\omega_0 a}{2} = \frac{2a}{T} \frac{\sin \frac{k\omega_0 a}{2}}{\frac{k\omega_0 a}{2}} \end{aligned}$$

la série de Fourier du signal rectangulaire périodique s'écrit

$$\text{rect}_{a,T}(t) = \frac{a}{T} + \frac{2a}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{k\omega_0 a}{2} \right) \cos(k\omega_0 t) \quad (1.87)$$

en introduisant le *sinus cardinal* qui est le prolongement continu de la fonction $\frac{\sin t}{t}$

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad (1.88)$$

dont les propriétés essentielles sont établies dans la section 2.2.2.

La version complexe de la série (1.87) est

$$\frac{a}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{k\omega_0 a}{2} \right) e^{jk\omega_0 t} \quad (1.89)$$

en observant que $\text{sinc}(0) = 1$.

Dans le cas particulier où $a = \frac{T}{2}$, on a

$$\text{sinc} \left(\frac{k\omega_0 a}{2} \right) = \text{sinc} \left(\frac{k\pi}{2} \right) = \frac{2}{k\pi} \sin \left(\frac{k\pi}{2} \right) \quad (1.90)$$

ou encore

$$\text{sinc} \left(\frac{k\omega_0 a}{2} \right) = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}, \\ \frac{2}{(2p+1)\pi} (-1)^p, & \text{si } k = 2p+1, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.91)$$

La série (1.87) s'écrit alors

$$\text{rect}_{\frac{T}{2}, T}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos[(2p+1)\omega_0 t]. \quad (1.92)$$

1.3.3 Signal triangulaire périodique

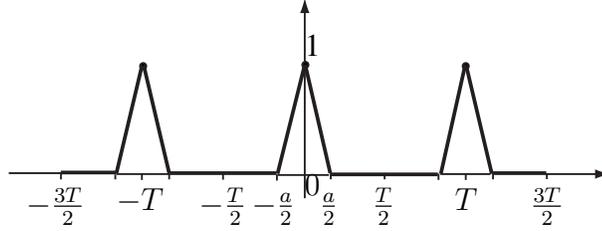


FIGURE 1.10 – Fonction périodique triangulaire $\text{tri}_{a,T}(t)$ de largeur a et de période T .

Il s'agit du signal périodique de période $T > 0$ et de largeur $0 < a < T$ dont la restriction à $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ est donnée par

$$\text{tri}_{a,T}(t) = \begin{cases} 1 - 2\frac{|t|}{a} & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{a}{2} < |t| \leq \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (1.93)$$

Ce signal vérifie les conditions de Dirichlet, il est réel et pair, sa série de Fourier est une série en cosinus telle que

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \text{tri}_{a,T}(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{2t}{a}\right) dt = \frac{a}{T} \quad (1.94)$$

et, si $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \text{tri}_{a,T}(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{2t}{a}\right) \cos(k\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4}{T} \left[\left(1 - \frac{2t}{a}\right) \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \right]_0^{\frac{a}{2}} + \frac{8}{aT} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k\omega_0} dt \\ &= \frac{8}{aT} \left[-\frac{\cos(k\omega_0 t)}{k^2 \omega_0^2} \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{16 \sin^2(k\omega_0 \frac{a}{4})}{k^2 \omega_0^2 a T} \\ &= \frac{a}{T} \text{sinc}^2\left(\frac{k\omega_0 a}{4}\right), \end{aligned} \quad (1.95)$$

et la série réelle de Fourier du signal triangulaire périodique s'écrit

$$\text{tri}_{a,T}(t) = \frac{a}{2T} + \frac{a}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k\omega_0 a}{4}\right) \cos(k\omega_0 t). \quad (1.96)$$

En notant que

$$\alpha_k = \frac{a_k}{2} = \frac{a}{2T} \text{sinc}^2\left(\frac{k\omega_0 a}{4}\right), \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z} \quad (1.97)$$

la version complexe de cette série s'écrit

$$\text{tri}_{a,T}(t) = \frac{a}{2T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k\omega_0 a}{4}\right) e^{jk\omega_0 t}. \quad (1.98)$$

1.4 Propriétés des séries de Fourier

Nous supposons que toutes les fonctions rencontrées dans ce paragraphe sont périodiques de période T .

1.4.1 Opérations élémentaires

Proposition 1.18 (Combinaison linéaire de signaux). *Si*

$$f(t) \leftrightarrow \alpha_k \quad \text{et} \quad g(t) \leftrightarrow \beta_k, \quad (1.99)$$

alors

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \leftrightarrow \lambda \alpha_k + \mu \beta_k, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \quad (1.100)$$

Démonstration. Si nous désignons par γ_k , les coefficients de Fourier de la fonction $\lambda f(t) + \mu g(t)$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{\lambda}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{\mu}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \lambda \alpha_k + \mu \beta_k. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.19 (Signal conjugué). *Si*

$$f(t) \leftrightarrow \alpha_k, \quad (1.101)$$

alors

$$\overline{f(t)} \leftrightarrow \overline{\alpha_{-k}}. \quad (1.102)$$

Démonstration. Si nous désignons par β_k les coefficients de Fourier de la fonction $\overline{f(t)}$, on obtient

successivement

$$\begin{aligned}
 \beta_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{f(t)} e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{f(t) e^{jk\omega_0 t}} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j(-k)\omega_0 t} dt \\
 &= \overline{\alpha_{-k}}.
 \end{aligned}$$

□

En utilisant les propositions 1.18 et la formule (1.19), on peut obtenir les coefficients de Fourier des fonctions $\mathcal{R}f(t)$ et $\mathcal{I}f(t)$ à partir des coefficients de Fourier de $f(t)$.

Proposition 1.20 (Partie réelle ou imaginaire d'un signal). *Si*

$$f(t) \leftrightarrow \alpha_k, \quad (1.103)$$

alors

$$\mathcal{R}f(t) \leftrightarrow \frac{\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}}}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}f(t) \leftrightarrow \frac{\alpha_k - \overline{\alpha_{-k}}}{2j}. \quad (1.104)$$

Démonstration. Si $f(t) \leftrightarrow \alpha_k$, la proposition 1.19 assure que

$$\overline{f(t)} \leftrightarrow \overline{\alpha_{-k}}. \quad (1.105)$$

On conclut en observant que

$$\mathcal{R}f(t) = \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2}, \quad \mathcal{I}f(t) = \frac{f(t) - \overline{f(t)}}{2j} \quad (1.106)$$

et en utilisant la proposition 1.18. □

1.4.2 Modification dans le domaine temporel

Proposition 1.21 (Translation d'un signal). *Si*

$$f(t) \leftrightarrow \alpha_k, \quad (1.107)$$

alors

$$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} \alpha_k, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.108)$$

Démonstration. Si nous désignons par β_k les coefficients de Fourier de la fonction $f(t - t_0)$, périodique de période T , on a

$$\beta_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t - t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (1.109)$$

En effectuant le changement de variables

$$t - t_0 = \tau \Leftrightarrow t = t_0 + \tau, \quad (1.110)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-t_0}^{\frac{T}{2}-t_0} f(\tau) e^{-jk\omega_0(t_0+\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{T} e^{-jk\omega_0 t_0} \int_{-\frac{T}{2}-t_0}^{\frac{T}{2}-t_0} f(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} e^{-jk\omega_0 t_0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \\ &= e^{-jk\omega_0 t_0} \alpha_k, \end{aligned}$$

en utilisant la définition 1.6 des fonctions périodiques. □

Les fonctions $f(t)$ et $f(t - t_0)$ ont le même spectre de modules (et d'amplitudes) puisque

$$|e^{-jk\omega_0 t_0} \alpha_k| = |\alpha_k|, \quad (1.111)$$

mais pas le même spectre d'arguments (et de phases) car

$$\arg(e^{-jk\omega_0 t_0} \alpha_k) = \arg \alpha_k - k\omega_0 t_0. \quad (1.112)$$

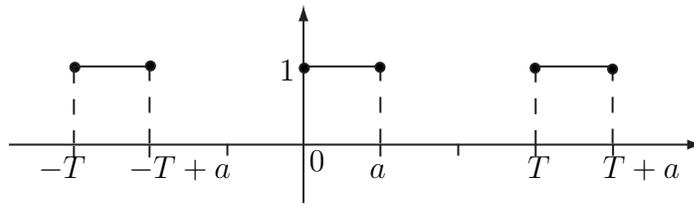


FIGURE 1.11 – Signal rectangulaire $\text{rect}_{a,T}$ translaté de $\frac{a}{2}$.

Exemple 1.22. Déterminons les coefficients de Fourier du signal (voir figure 1.11)

$$f(t) = \text{rect}_{a,T} \left(t - \frac{a}{2} \right). \quad (1.113)$$

Comme les coefficients de Fourier de $\text{rect}_{a,T}(t)$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{a}{T}, \\ \alpha_k &= \frac{a}{T} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 a}{2}\right) \quad \text{si } k \in \mathbb{Z}_0;\end{aligned}$$

les coefficients de Fourier de $f(t)$ valent

$$\beta_k = e^{-j\frac{k\omega_0 a}{2}} \alpha_k; \quad (1.114)$$

soit

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{a}{T}, \\ \beta_k &= \frac{a}{T} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 a}{2}\right) e^{-j\frac{k\omega_0 a}{2}} \quad \text{si } k \in \mathbb{Z}_0.\end{aligned}$$

D'après (1.58) et (1.59), la série réelle de Fourier du signal $f(t)$ s'écrit

$$f(t) = \mathcal{R}\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [2\mathcal{R}\beta_k \cos(k\omega_0 t) - 2\mathcal{I}\beta_k \sin(k\omega_0 t)], \quad (1.115)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{a}{T} + \frac{2a}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 a}{2}\right) \left(\cos\frac{k\omega_0 a}{2} \cos(k\omega_0 t) + \sin\frac{k\omega_0 a}{2} \sin(k\omega_0 t) \right) \\ &= \frac{a}{T} + \frac{2a}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 a}{2}\right) \cos\left[k\omega_0 \left(t - \frac{a}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Proposition 1.23 (Renversement du temps). *Si*

$$f(t) \leftrightarrow \alpha_k, \quad (1.116)$$

alors

$$f(-t) \leftrightarrow \alpha_{-k}. \quad (1.117)$$

Démonstration. Si nous désignons par β_k les coefficients de Fourier de la fonction $f(-t)$, périodique de période T , on a

$$\beta_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(-t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1.118)$$

ou encore, en effectuant le changement de variables $t = -\tau$,

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(\tau) e^{jk\omega_0 \tau} (-1) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j(-k)\omega_0 \tau} d\tau \\ &= \alpha_{-k}.\end{aligned}$$

□

La proposition 1.23 permet de caractériser les signaux pairs ou impairs à partir de leurs spectres complexes. Ainsi, un signal est pair si et seulement si son spectre est pair puisque

$$f(t) \text{ pair} \Leftrightarrow f(-t) = f(t) \Leftrightarrow \alpha_{-k} = \alpha_k. \quad (1.119)$$

De même, un signal est impair si et seulement si son spectre est impair.

1.4.3 Intégration et dérivation

On admettra les résultats suivants sans démonstration.

Proposition 1.24 (Intégration d'une série de Fourier). *La série de Fourier correspondant à une fonction $f(t)$ vérifiant les conditions de Dirichlet peut être intégrée terme à terme dans tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset \text{dom}_c f$. En particulier, on peut la primitiver terme à terme dans tout intervalle $I \subset \text{dom}_c f$.*

Remarquons cependant que la primitive d'une série de Fourier n'est en général plus une série de Fourier puisqu'elle comporte le terme $\frac{a_0}{2} t$.

Proposition 1.25 (Dérivation d'une série de Fourier). *Si la fonction périodique f est continue dans \mathbb{R} et si f' vérifie les conditions de Dirichlet, alors la série de Fourier de f peut être dérivée terme à terme; la série obtenue est la série de Fourier correspondant à $f'(t)$.*

Il importe que $f(t) \in C_0(\mathbb{R})$. Ainsi, en dérivant terme à terme la série de Fourier du signal en dents de scie (1.78), on obtient la série

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \omega_0 \cos(k\omega_0 t) \quad (1.120)$$

qui diverge en tout $t \in \mathbb{R}$ puisque son terme général ne tend pas vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$.

1.4.4 Puissance d'un signal périodique

Définissons la *puissance* d'une fonction périodique sur une période T .

Définition 1.26 (Puissance d'un signal périodique). *La puissance d'une fonction $f(t) \in L_2([\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ périodique de période T est donnée par*

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt. \quad (1.121)$$

L'intégrale existe bien puisqu'on a supposé f de carré intégrable.

Donnons une interprétation physique de cette notion. En électricité, on définit la puissance d'un élément d'un circuit traversé par un courant $i(t)$ et présentant une différence de potentiel $v(t)$ par le produit $i(t)v(t)$. La puissance moyenne sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ est alors donnée par

$$P = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} i(t)v(t) dt = \frac{R}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} i^2(t) dt \quad (1.122)$$

en utilisant la loi d'Ohm $v(t) = Ri(t)$, où R est la résistance.

Cette dernière expression est appelée puissance moyenne du courant $i(t)$ sur l'intervalle. En prenant $t_0 = -\frac{T}{2}$ et $t_1 = \frac{T}{2}$, on arrive à une quantité proportionnelle à la définition mathématique (1.121). En toute généralité, $f(t)$ peut prendre des valeurs complexes et c'est la raison pour laquelle on utilise $|f|^2$ et non pas simplement f^2 , de sorte que la puissance est toujours une quantité positive.

Fait intéressant, la puissance d'une fonction harmonique (1.17) est donnée par le carré de son amplitude

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 (\cos^2(\omega t + \phi_o) + \sin^2(\omega t + \phi_o)) dt \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = A^2. \end{aligned} \quad (1.123)$$

On retrouve la formule de l'effet Joule en électricité $P = RI^2$, au même facteur R près.

Proposition 1.27 (Formule de Parseval). *Si f satisfait aux conditions de Dirichlet, alors la puissance du signal est donnée par*

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2). \quad (1.124)$$

Démonstration. Démontrons la formule de Parseval dans le cas où $f \in C_0([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$. Sous cette hypothèse, la série de Fourier de f est intégrable terme à terme sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. On a

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad (1.125)$$

de sorte que

$$|f(t)|^2 = f(t) \overline{f(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \overline{f(t)}. \quad (1.126)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \overline{f(t)} \right) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\omega_0 t} \overline{f(t)} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_0 t} f(t) dt \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \bar{\alpha}_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 = |\alpha_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2) \quad (1.127)$$

et qu'en outre

$$\begin{aligned} |\alpha_0|^2 &= \frac{1}{4} |a_0|^2, \\ |\alpha_k|^2 &= \alpha_k \overline{\alpha_k} = \frac{1}{4} (a_k - jb_k)(\overline{a_k} + j\overline{b_k}) \\ &= \frac{1}{4} [|a_k|^2 + |b_k|^2 + j(a_k \overline{b_k} - \overline{a_k} b_k)], \\ |\alpha_{-k}|^2 &= \alpha_{-k} \overline{\alpha_{-k}} = \frac{1}{4} (a_k + jb_k)(\overline{a_k} - j\overline{b_k}) \\ &= \frac{1}{4} [|a_k|^2 + |b_k|^2 + j(\overline{a_k} b_k - a_k \overline{b_k})], \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 = \frac{1}{4} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2). \quad (1.128)$$

□

La formule de Parseval peut s'interpréter en terme de puissance. De fait, la puissance de l'harmonique $u_k(t)$ ($k \in \mathbb{N}_0$) est donnée par

$$P(u_k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_k(t) \overline{u_k(t)} dt. \quad (1.129)$$

Comme

$$\begin{aligned} u_k(t) \overline{u_k(t)} &= (\alpha_k e^{jk\omega_0 t} + \alpha_{-k} e^{-jk\omega_0 t}) (\overline{\alpha_k} e^{-jk\omega_0 t} + \overline{\alpha_{-k}} e^{jk\omega_0 t}) \\ &= |\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2 + \alpha_k \overline{\alpha_{-k}} e^{j2k\omega_0 t} + \alpha_{-k} \overline{\alpha_k} e^{-j2k\omega_0 t}, \end{aligned}$$

on obtient

$$P(u_k) = |\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2 = \frac{1}{2} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \quad (1.130)$$

puisque

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2k\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2k\omega_0 t} dt = 0. \quad (1.131)$$

D'autre part, en utilisant (1.55), on a

$$|\alpha_0|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} = |f_{moy}|^2. \quad (1.132)$$

Ainsi,

$$P(f) = |f_{moy}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} P(u_k). \quad (1.133)$$

En particulier, si $f_{moy} = 0$, la puissance du signal est la somme des puissances des harmoniques.

1.5 Résolution d'équations aux dérivées partielles

Dans ce paragraphe, nous montrons comment les séries de Fourier peuvent être utilisées dans la résolution d'équations aux dérivées partielles. Nous nous limiterons à l'équation de la chaleur et à l'équation des ondes.

1.5.1 Équation de la chaleur

A l'époque de Fourier (1761-1830), la transmission de la chaleur était un phénomène largement étudié, tant d'un point de vue pratique que d'un point de vue scientifique.

Dans l'industrie, ce phénomène était important dans le choix des matériaux devant servir à construire des machines, alors que dans le domaine scientifique il devait contribuer à déterminer la température à l'intérieur du globe terrestre et en particulier ses variations au cours du temps.

Dans son ouvrage *Théorie analytique de la chaleur* (1822), Fourier aborda la détermination de la température au sein d'un solide en fonction des variables de position x, y, z et du temps t . Il montra que la température $T(x, y, z, t)$ devait satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1.134)$$

où c est une constante positive dont la valeur dépend de la nature des matériaux intervenant dans la composition du solide. Cette équation est appelée *équation de la chaleur*.

Nous allons résoudre l'équation de la chaleur dans le cas d'une tige de longueur L et d'épaisseur négligeable. Nous désignons par $u(x, t)$ la température régnant au point intérieur x de la tige occupant l'intervalle $[0, L]$ et à l'instant $t > 0$. La fonction $u(x, t)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1.135)$$

appelée *équation de la chaleur à une dimension*.

Nous allons envisager deux problèmes qui diffèrent d'après les conditions aux limites et les conditions initiales.

Premier problème

1. Conditions aux limites : les extrémités de la tige sont maintenues en permanence à la température nulle, soit

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(L, t) = 0 \quad \text{pour } t > 0. \quad (1.136)$$

2. Condition initiale : au temps $t = 0$, la température en tout point de la tige est donnée par une fonction $f(x)$, soit

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour } 0 < x < L. \quad (1.137)$$

Nous ne nous préoccupons pas ici des conditions qu'il faut imposer à f pour que le problème considéré admette une solution unique, mais nous allons montrer comment les séries de Fourier permettent sa résolution effective. Nous utiliserons à ce titre la *méthode de séparation des variables*.

Le principe de cette méthode consiste à rechercher dans un premier temps un ensemble de solutions non identiquement nulles de l'équation (1.135) de la forme

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (1.138)$$

et compatibles avec les conditions aux limites (1.136). Il s'agit ensuite d'additionner ces solutions (appelées aussi *modes de température*) afin de satisfaire à la condition initiale (1.137).

En exprimant que la fonction $u(x, t)$ vérifie l'équation (1.135), on obtient

$$X(x)T'(t) = cX''(x)T(t) \quad (1.139)$$

ou encore après division des deux membres par $cX(x)T(t)$ (cette fonction n'est pas identiquement nulle),

$$\frac{T'(t)}{cT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{pour } 0 < x < L \text{ et } t > 0. \quad (1.140)$$

Comme le premier membre est une fonction de t et le second une fonction de x , ils ne peuvent être égaux que s'ils se réduisent à une constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent, l'équation (1.135) se ramène à deux équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients constants :

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \text{pour } 0 < x < L, \quad (1.141)$$

$$T'(t) - c\lambda T(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0. \quad (1.142)$$

Les conditions aux limites se traduisent par

$$X(0) = 0 \quad \text{et} \quad X(L) = 0. \quad (1.143)$$

Résolvons d'abord l'équation (1.141) sous les conditions (1.143). Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre, homogène à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est

$$z^2 - \lambda = 0, \quad (1.144)$$

la nature de la solution générale de (1.141) dépend du signe de λ .

1. Si $\lambda > 0$, on a

$$X(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (1.145)$$

où α, β désignent des constantes arbitraires.

En tenant compte des conditions aux limites (1.143), on obtient

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{\sqrt{\lambda}L} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha (e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 2\alpha \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}L = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.146)$$

de sorte que la solution $X(x)$ est identiquement nulle : il est donc impossible que $\lambda > 0$.

2. On arrive à la même conclusion si on envisage $\lambda = 0$.

3. Si $\lambda < 0$, on a

$$X(x) = \alpha \cos(\sqrt{-\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{-\lambda}x). \quad (1.147)$$

Les conditions aux limites s'expriment par

$$\alpha = 0 \quad (1.148)$$

$$\beta \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0. \quad (1.149)$$

Comme $\beta \neq 0$ afin d'avoir une solution $X(x)$ non identiquement nulle, la dernière équation impose

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}L = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

A chaque valeur $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ correspond la solution

$$X_k(x) = \beta_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.150)$$

L'équation différentielle

$$T'(t) - c\lambda_k T(t) = 0 \quad (1.151)$$

admet la solution

$$T_k(t) = \gamma_k e^{-c\lambda_k t} \quad (1.152)$$

de sorte que le mode de température correspondant est donné par

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = b_k \sin \frac{k\pi x}{L} e^{-c\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \quad (1.153)$$

où nous avons introduit la constante arbitraire $b_k = \beta_k \gamma_k$.

Comme toute combinaison linéaire de modes de température vérifie l'équation (1.135) et les conditions aux limites (1.136), construisons la solution

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L} e^{-c\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \quad (1.154)$$

obtenue en additionnant les *modes* $u_k(x, t)$.

La condition initiale (1.137) se traduit par

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L} = f(x) \quad \text{pour } 0 < x < L. \quad (1.155)$$

Autrement dit, les b_k sont les coefficients du développement en série de Fourier en sinus de la fonction donnée $f(x)$ dans l'intervalle $]0, L[$. Si nous introduisons la fonction $F(x)$ impaire et périodique de période $2L$, dont la restriction à $] -L, L[$ est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0, L[, \\ -f(-x) & \text{si } x \in]-L, 0[, \end{cases} \quad (1.156)$$

nous avons

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.157)$$

où

$$b_k = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L F(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx. \quad (1.158)$$

En particulier,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad \forall x \in]0, L[\quad (1.159)$$

avec

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx. \quad (1.160)$$

Deuxième problème

1. Conditions aux limites : les extrémités de la tige sont parfaitement isolées, soit

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, T) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (1.161)$$

2. Condition initiale : au temps $t = 0$, la température en tout point de la tige est donnée par une fonction $f(x)$, soit

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour } 0 < x < L. \quad (1.162)$$

En adoptant la même méthode de résolution que dans le premier problème, on montre que le deuxième problème possède la solution

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L} e^{-c\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \quad (1.163)$$

où

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx. \quad (1.164)$$

1.5.2 Équation des ondes

Soit une corde vibrante de longueur L dont les extrémités sont fixes. L'équation décrivant le déplacement vertical $u(x, t)$ du point de la corde d'abscisse x est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1.165)$$

où a désigne une constante dépendant de la tension régnant dans la corde. Cette équation est appelée *équation des ondes* à une dimension¹⁹.

19. Dans l'espace physique à 3 dimensions, l'équation des ondes s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (1.166)$$

Les conditions aux limites traduisent que les extrémités sont fixes, soit

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(L, t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (1.167)$$

Les conditions initiales expriment qu'à l'instant $t = 0$, le déplacement vertical de la corde est donné par une fonction $f(x)$ et que la vitesse initiale de la corde est nulle, soit

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L. \quad (1.168)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, on montre que ce problème admet une solution du type

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{k\pi at}{L} \quad (1.169)$$

où

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx. \quad (1.170)$$

Exercices

1) Déterminer les développements en série de Fourier des fonctions périodiques suivantes :

- a) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } t \in]0, \pi[\end{cases}$ (période = 2π).
- b) $f(t) = \begin{cases} -t & \text{si } t \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ t & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$ (période = π).
- c) $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ (période = 2π).
- d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\frac{T}{2}, 0[\\ \sin \omega_0 t & \text{si } t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases}$ (période = $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$;
 $\omega_0 > 0$).
- e) $f(t) = \operatorname{sh} t$ si $t \in]-\pi, \pi[$ (période = 2π).
- f) $f(t) = \operatorname{ch} t$ si $t \in]-\pi, \pi[$ (période = 2π).
- g) $f(t) = t \sin t$ si $t \in [-\pi, \pi]$ (période = 2π).
- h) $f(t) = t \cos t$ si $t \in]-\pi, \pi[$ (période = 2π).
- i) $f(t) = e^t$ si $t \in]-1, 1[$ (période = 2).
- j) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-1, 0[\\ e^{-t} & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$ (période = 2).
- k) $f(t) = t^2$ si $t \in]-\pi, \pi[$ (période = 2π).
- l) $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in]-2, 0[\\ t & \text{si } t \in [0, 2] \end{cases}$ (période = 4).
- m) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-\pi, 0] \\ t(\pi - t) & \text{si } t \in [0, \pi] \end{cases}$ (période = 2π).
- n) $f(t) = 1 + |t|$ si $t \in [-\pi, \pi]$ (période = 2π).

- 2) a) Déterminer le développement en série de Fourier complexe de la fonction $f(t)$ périodique de période 2 telle que

$$f(t) = t^2 + jt, \quad \forall t \in]-1, 1]. \quad (1.171)$$

- b) En déduire le développement en série de Fourier en sinus et cosinus.

- 3) a) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$ périodique de période 2π donnée par

$$f(t) = 1 - \frac{|t|}{\pi} \quad \text{si } |t| \leq \pi. \quad (1.172)$$

- b) En déduire la valeur de la série numérique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (1.173)$$

- 4) a) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction périodique de période π et donnée par $f(t) = |\sin t|$ si $|t| \leq \frac{\pi}{2}$.

- b) En déduire la valeur des séries numériques

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}. \quad (1.174)$$

- 5) a) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$ périodique de période 1 définie par

$$f(t) = t^2, \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (1.175)$$

- b) En déduire la valeur des séries numériques

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad (1.176)$$

- 6) a) A partir du développement en série de Fourier du signal triangulaire $\text{tri}_{T,T}(t)$ périodique de période T , montrer en utilisant la formule de Parseval que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (1.177)$$

- b) En déduire la valeur de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}. \quad (1.178)$$

(Suggestion : regrouper les termes d'indice pair et ceux d'indice impair.)

- 7) Désignons par $f(t)$ la fonction périodique de période 2 définie dans $] - 1, 1]$ par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + t & \text{si } t \in]-1, 0], \\ -t^2 + t & \text{si } t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1.179)$$

- a) Déterminer le développement en série de Fourier de $f(t)$.
 b) En déduire la valeur de la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}. \quad (1.180)$$

- c) En utilisant la formule de Parseval, montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}. \quad (1.181)$$

- d) En utilisant la méthode de résolution de l'exercice 6 b), déterminer la valeur de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}. \quad (1.182)$$

- 8) La fonction de transfert d'un système linéaire invariant est donnée par

$$H(\omega) = (1 - e^{-2j\omega})^2. \quad (1.183)$$

- a) La réponse de ce système à un signal périodique réel est-elle encore réelle ? Justifier votre réponse.
 b) Déterminer la réponse au signal d'entrée $x(t) = \sin \omega_0 t$.
 c) Quelle est la réponse de ce système à un signal périodique de période 1 ?
 9) Déterminer les développements en série de Fourier des signaux périodiques suivants (A désigne une constante positive) :

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} -A & \text{si } t \in]-\frac{T}{2}, 0] \\ A & \text{si } t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases} \quad (\text{période} = T).$$

$$\text{b) } f(t) = \begin{cases} -\frac{2A}{T}t & \text{si } t \in]-\frac{T}{2}, 0] \\ \frac{2A}{T} & \text{si } t \in [0, \frac{T}{2}] \end{cases} \quad (\text{période} = T).$$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T}t & \text{si } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ \frac{A}{T}t & \text{si } t \in]0, T] \end{cases} \quad (\text{période} = T).$$

$$\text{d) } f(t) = A|\sin \omega_0 t| \quad \text{si } t \in [0, T] \quad (\text{période} = T = \frac{\pi}{\omega_0}, \omega_0 > 0).$$

$$\text{e) } f(t) = \cos at \quad \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \quad (\text{période} = T, T < \frac{\pi}{a}).$$

Solutions

$$1) \text{ a) } \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1},$$

$$\text{b) } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(4k-2)t}{(2k-1)^2},$$

- c) $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos 2kt}{4k^2 - 1},$
- d) $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2k\omega_0 t,$
- e) $\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k^2 + 1} \sin kt,$
- f) $\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} \cos kt \right],$
- g) $1 - \frac{1}{2} \cos t + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 - 1} \cos kt,$
- h) $-\frac{1}{2} \sin t + 2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 - 1} \sin kt,$
- i) $\operatorname{sh} 1 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + k^2 \pi^2} (\cos(k\pi)t - k\pi \sin k\pi t) \right],$
- j) $\frac{1 - e^{-1}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k e^{-1}}{1 + k^2 \pi^2} (\cos(k\pi)t + k\pi \sin k\pi t),$
- k) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt,$
- l) $\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\frac{\pi}{2}t}{(2k-1)^2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}t}{k},$
- m) $\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{k^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{(2k-1)^3},$
- n) $\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2};$
- 2) a) $\frac{1}{3} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{2}{k^2 \pi^2} - \frac{1}{k\pi} \right] e^{jk\pi t},$
- b) $\frac{1}{3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi)t - \frac{j}{k\pi} \sin k\pi t \right);$
- 3) a) $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2},$
- b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$

$$4) \text{ a) } \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1},$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4};$$

$$5) \text{ a) } \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos 2k\pi t,$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$6) \text{ b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90};$$

$$7) \text{ a) } \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi t}{(2k+1)^3},$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

$$\text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945};$$

$$8) \text{ a) } x(t) \leftrightarrow \alpha_k \Rightarrow y(t) \leftrightarrow \beta_k = H(k\omega_0)\alpha_k \quad \text{et} \quad \beta_{-k} = \overline{\beta_k} \Rightarrow y(t) \text{ réel,}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{1}{2j}(H(\omega_0)e^{j\omega_0 t} - H(-\omega_0)e^{-j\omega_0 t}) \\ &= (1 - 2\cos 2\omega_0 + \cos 4\omega_0) \sin \omega_0 t + (2\sin 2\omega_0 - \sin 4\omega_0) \cos \omega_0 t, \\ &= 4\sin^2 \omega_0 \sin \omega_0(2 - t), \end{aligned}$$

$$\text{c) } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{j2\pi kt} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(2k\pi)\alpha_k e^{j2\pi kt} = 0;$$

$$9) \text{ a) } \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\omega_0 t}{2k+1},$$

$$\text{b) } \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\omega_0 t}{(2k+1)^2},$$

$$\text{c) } \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k},$$

$$\text{d) } \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega_0 t}{4k^2 - 1},$$

$$\text{e) } \operatorname{sinc}\left(\frac{aT}{2}\right) \left(1 + 2a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(k\omega_0 t)}{a^2 - k^2\omega_0^2}\right).$$

Chapitre 2

Transformée de Fourier

2.1 Transformée de Fourier d'un signal

2.1.1 Approche intuitive

En partant du développement en série de Fourier d'une fonction périodique de période T et en faisant tendre T vers $+\infty$, on aboutit à la définition de la transformée de Fourier d'une fonction non périodique.

Si le raisonnement utilisé est parfois intuitif, il offre l'avantage de jeter les bases de l'analyse de Fourier qui sera abordée avec la rigueur adéquate dans la suite de ce chapitre.

Soit $f(t)$ un signal non périodique continûment dérivable par morceaux dans \mathbb{R} (voir figure 2.1) et T un nombre positif arbitraire. Introduisons la fonction périodique à f_T motif de période T définie par

$$f_T(t) = f(t), \quad \forall t \in \left] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right[, \quad (2.1)$$

représentée sur la figure 2.2.

Le théorème de Dirichlet (proposition 1.15) permet de développer la fonction f_T en série de

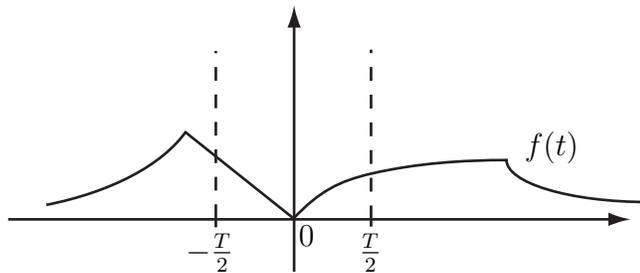


FIGURE 2.1 – Signal non périodique continûment dérivable par morceaux dans \mathbb{R} .

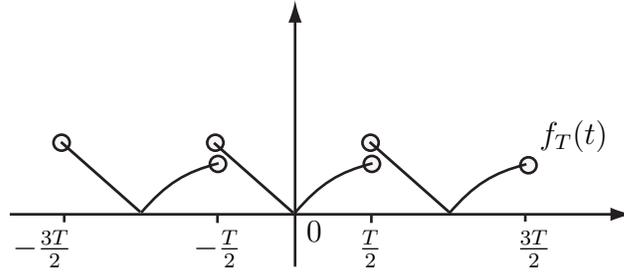


FIGURE 2.2 – Fonction périodique de période T construite sur la fonction de la figure 2.1.

Fourier. Si on pose $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, on peut écrire, quel que soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt \right) e^{jk\Delta\omega t} \\ &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt \right) e^{jk\Delta\omega t}, \end{aligned}$$

d'où en particulier, pour $t \in] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$,

$$f(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt \right) e^{jk\Delta\omega t}. \quad (2.2)$$

Prenons la limite pour $T \rightarrow +\infty$, de sorte que $\Delta\omega \rightarrow 0$. On obtient

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt \right) e^{jk\Delta\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

En posant

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.4)$$

il vient

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

ou encore

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.6)$$

en vertu de l'interprétation de l'intégrale comme limite d'une somme.

La fonction $F(\omega)$ définie par la formule (2.4) est appelée *transformée de Fourier* de f . La formule (2.6) montre que l'on peut retrouver f à partir de F par le biais d'une intégrale appelée *intégrale de Fourier* de f ou *transformée de Fourier inverse*.

2.1.2 Définition

La transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ est la fonction F de la variable réelle ω définie par

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.7)$$

pourvu que cette intégrale existe.¹ Elle est également notée

$$(\mathcal{F}f)(\omega) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_\omega f \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_\omega[f(t)]. \quad (2.9)$$

En particulier, on a

$$\mathcal{F}_0 f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt. \quad (2.10)$$

Déterminons les conditions d'existence de la transformée de Fourier.

Proposition 2.1. *La transformée de Fourier $F(\omega)$ existe et est définie dans \mathbb{R} si et seulement si la fonction $f(t)$ est intégrable dans \mathbb{R} .*

Démonstration. De fait, on a successivement

$$\begin{aligned} F(\omega) \text{ est défini} &\Leftrightarrow f(t)e^{-j\omega t} \in L_1(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow |f(t)e^{-j\omega t}| \in L_1(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow |f(t)| \in L_1(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow f(t) \in L_1(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

auquel cas $F(\omega)$ est défini, quel que soit $\omega \in \mathbb{R}$. □

La condition $f \in L_1(\mathbb{R})$ est assez restrictive, il s'ensuit que beaucoup de fonctions n'admettent pas de transformée de Fourier.

Exemple 2.2. *Déterminons la transformée de Fourier du signal $f(t) = e^{-at}\text{ech}(t)$ (avec $a > 0$), où on définit la fonction échelon-unité*

$$\text{ech}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

1. Certains auteurs définissent la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L_1(\mathbb{R})$ par l'expression

$$\tilde{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\nu t} dt, \quad (2.8)$$

faisant apparaître la fréquence officielle ν . On a évidemment $\tilde{F}(\nu) = F(2\pi\nu)$. Nous avons adopté dans le cours la définition (2.7) afin d'alléger les écritures au maximum.

On a $f \in L_1(\mathbb{R})$ car la fonction f est intégrable en $+\infty$. Dès lors,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \frac{-1}{a+j\omega} [e^{-(a+j\omega)t}]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a+j\omega}. \end{aligned}$$

On a donc

$$F(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

La fonction $F(\omega)$ est continue dans \mathbb{R} et tend vers 0 à l'infini. Cependant, $F(\omega) \notin L_1(\mathbb{R})$ puisque

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega F(\omega) = -j \neq 0. \quad (2.13)$$

On peut préciser la définition (2.7) dans le cas où le signal f est pair

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

ou, de manière analogue, si f est impair

$$F(\omega) = -2j \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \quad (2.15)$$

2.1.3 Théorème fondamental

Le théorème fondamental de l'analyse de Fourier, appelé également théorème de Fourier, exprime qu'une fonction peut être retrouvée sous certaines conditions à partir de sa transformée de Fourier. Nous l'accepterons sans démonstration.

Proposition 2.3 (Théorème de Fourier). *Soit $f(t)$ une fonction intégrable et continûment dérivable par morceaux dans \mathbb{R} . Si $F(\omega)$ désigne sa transformée de Fourier, on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega = f(t), \quad \forall t \in \text{dom}_c f \quad (2.16)$$

et, dans le cas d'une discontinuité au point t ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}, \quad \forall t \notin \text{dom}_c f. \quad (2.17)$$

En adoptant la convention de la définition 1.16, la formule (2.16) s'écrit simplement

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Il s'agit de l'intégrale² de Fourier d'un signal f ou transformée de Fourier inverse d'un signal f et on écrit

$$f(t) = \mathcal{F}_t^{-1} F. \quad (2.20)$$

On a donc

$$\mathcal{F}_\omega \mathcal{F}_t^{-1} F = F(\omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_t^{-1} \mathcal{F}_\omega f = f(t). \quad (2.21)$$

À noter que la transformée de Fourier inverse se ramène à une transformée de Fourier dans le cas où $F(\omega) \in L_1(\mathbb{R})$, puisque

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{-j\omega(-t)} d\omega \\ &= \mathcal{F}_{-t} \left[\frac{1}{2\pi} F(\omega) \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.1.4 Spectre d'une fonction non périodique

Il ressort du théorème de Fourier que le signal non-périodique f défini dans le *domaine temporel* est complètement déterminé par sa transformée de Fourier F . On note

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega). \quad (2.23)$$

On dit que la fonction $F(\omega)$ décrit la fonction f dans le *domaine fréquentiel* : on remarque en effet que la dimension de la variable t (souvent un temps) est nécessairement l'inverse de la variable ω (une fréquence, ou plus exactement une pulsation).

On dit aussi que $F(\omega)$ constitue le *spectre* de f . Il s'agit d'un *spectre continu* car la variable ω prend toutes les valeurs réelles. Le spectre de f est complètement déterminé par

— le *spectre des modules* ou des *amplitudes (complexes)* :

$$|F(\omega)|, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

— le *spectre des arguments* ou des *phases complexes*

$$\arg F(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

2. En toute rigueur, l'intégrale du second membre devrait être une *intégrale fléchée* définie par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.19)$$

Elle ne devient l'intégrale ordinaire que si $F(\omega) \in L_1(\mathbb{R})$. Nous avons cependant décidé de l'écrire comme une intégrale ordinaire par souci de facilité.

Ces deux spectres sont eux-mêmes des signaux dont on peut tracer le graphe.

Exemple 2.4. Dans l'exemple 2.2, on a établi que

$$e^{-at} \text{ech}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a} \quad \text{si } a > 0. \quad (2.26)$$

On montre de même que

$$e^{at} \text{ech}(-t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega - a} \quad \text{si } a < 0. \quad (2.27)$$

Plus généralement, si α désigne un nombre complexe, on a

$$e^{\alpha t} \text{ech}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega - \alpha} \quad \text{si } \Re\alpha < 0, \quad (2.28)$$

$$e^{\alpha t} \text{ech}(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{j\omega - \alpha} \quad \text{si } \Re\alpha > 0. \quad (2.29)$$

2.1.5 Dualité

Proposition 2.5 (Principe de dualité). Soit f une fonction continûment dérivable par morceaux et intégrable dans \mathbb{R} . Si son spectre F est intégrable dans \mathbb{R} , alors

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega). \quad (2.30)$$

Démonstration. D'après le théorème de Fourier, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 2\pi f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad (2.31)$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi f(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad (2.32)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_t[F(\omega)] = 2\pi f(-t). \quad (2.33)$$

On obtient le résultat annoncé en permutant les variables t et ω . \square

La proposition 2.5 reste valable si $F \notin L_1(\mathbb{R})$; dans ce cas, la transformée de Fourier de F n'est pas une intégrale ordinaire, mais une intégrale fléchée du type

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M F(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.34)$$

La proposition 2.5 traduit la *dualité* (ou la *réciprocité*) de la transformée de Fourier : si on connaît le spectre F de f , on peut en déduire le spectre de F . Plus précisément, on a

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega). \quad (2.35)$$

2.2 Transformées de Fourier de signaux usuels

2.2.1 Signal rectangulaire

Il s'agit du signal défini par

$$\text{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{a}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |t| = \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{a}{2}, \end{cases} \quad (2.36)$$

avec la *largeur* $a > 0$.

Comme $\text{rect}_a(t) \in L_1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est donnée par

$$\mathcal{F}_\omega[\text{rect}_a(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-j\omega t} dt. \quad (2.37)$$

Si $\omega \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\omega[\text{rect}_a(t)] &= -\frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{e^{j\omega \frac{a}{2}} - e^{-j\omega \frac{a}{2}}}{j\omega} \\ &= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{a\omega}{2}\right) = a \text{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right), \end{aligned}$$

tandis que si $\omega = 0$,

$$\mathcal{F}_0[\text{rect}_a(t)] = a. \quad (2.38)$$

Par conséquent,

$$\text{rect}_a(t) \leftrightarrow a \text{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right). \quad (2.39)$$

2.2.2 Sinus cardinal

Pour rappel, le *sinus cardinal* est la fonction définie par

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Son graphe est présenté sur la figure 2.3.

Par dualité de l'expression (2.39), on déduit que

$$a \text{sinc}\left(\frac{at}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi \text{rect}_a(-\omega) \quad (2.41)$$

ou encore, en remplaçant a par $2a$,

$$2a \text{sinc}(at) \leftrightarrow 2\pi \text{rect}_{2a}(\omega); \quad (2.42)$$

c'est-à-dire

$$\text{sinc}(at) \leftrightarrow \frac{\pi}{a} \text{rect}_{2a}(\omega). \quad (2.43)$$

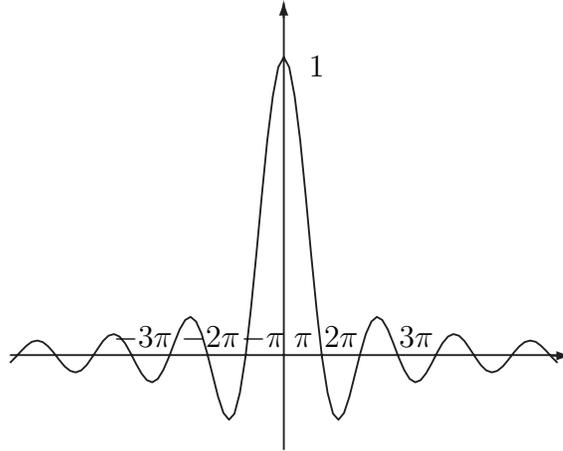


FIGURE 2.3 – Graphe de la fonction sinc.

En particulier, si $a = 1$, on peut déduire l'intégrale remarquable sur \mathbb{R}

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \mathcal{F}_0 \left[\frac{\sin t}{t} \right] = \pi \operatorname{rect}_2(0) = \pi. \quad (2.44)$$

L'intégrale considérée est en réalité une intégrale fléchée, obtenue facilement à l'aide de la transformation de Fourier.

La proposition suivante, donnée à titre informatif, montre qu'une approche classique est bien plus compliquée.

Proposition 2.6 (Intégrale fléchée de sinc). *La fonction sinc n'est pas intégrable à l'infini, mais elle admet l'intégrale fléchée*

$$\int_{\rightarrow-\infty}^{\rightarrow+\infty} \operatorname{sinc}(t) dt = \pi. \quad (2.45)$$

Démonstration. On démontre facilement que la fonction $\operatorname{sinc}(t)$ est paire et qu'elle est $C_\infty(\mathbb{R})$.

Pour se convaincre que la fonction n'est pas intégrable à l'infini, on peut raisonner par l'absurde : admettons que $\operatorname{sinc}(t)$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$.

Si on remarque que

$$\left| \frac{\sin^2 t}{t} \right| = |\sin t \operatorname{sinc}(t)| \leq |\operatorname{sinc}(t)|, \quad \forall t \in [1, +\infty[, \quad (2.46)$$

on doit admettre, par application du critère de Lebesgue, que $\frac{\sin^2 t}{t} \in L_1([1, +\infty[)$.

De même

$$\left| \frac{\sin^2 t}{t + \frac{\pi}{2}} \right| = \frac{\sin^2 t}{t + \frac{\pi}{2}} \leq \frac{\sin^2 t}{t}, \quad \forall t \in [1, +\infty[\quad (2.47)$$

et on doit conclure que $\frac{\sin^2 t}{t + \frac{\pi}{2}} \in L_1([1, +\infty[)$.

En outre, en effectuant le changement de variables $v = t + \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t + \frac{\pi}{2}} dt = \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos^2 v}{v} dv. \quad (2.48)$$

Les fonctions $\frac{\sin^2 t}{t}$ et $\frac{\cos^2 t}{t}$ sont donc intégrables dans $]1 + \frac{\pi}{2}, +\infty[$ et leur somme $\frac{1}{t}$ l'est donc aussi. C'est manifestement absurde car on sait que cette dernière fonction n'est pas intégrable à l'infini.

La fonction sinc admet par contre une intégrale fléchée. En effet, considérons $M > 0$ et l'intégrale parfaitement licite

$$\int_{-M}^M \text{sinc}(t) dt = 2 \int_0^M \text{sinc}(t) dt = 2 \int_0^M \frac{\sin t}{t} dt, \quad (2.49)$$

car sinc est une fonction paire.

Puisque

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} dx = \left[\frac{e^{-xt}}{-t} \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{t}, \quad (2.50)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} 2 \int_0^M \frac{\sin t}{t} dt &= 2 \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-xt} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} dx \int_0^M e^{-xt} \sin t dt, \end{aligned} \quad (2.51)$$

la permutation des intégrales étant justifiée par le critère de Tonelli. Or, on peut calculer l'intégrale par rapport à t à l'aide de l'artifice suivant

$$2 \int_0^{+\infty} dx \int_0^M e^{-xt} \sin t dt = 2 \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt - 2 \int_0^{+\infty} dx \int_M^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt. \quad (2.52)$$

On obtient, pour l'intégrale sur x du deuxième terme, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} 2 \int_M^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt &= 2 [-e^{-xt} \cos t]_M^{+\infty} - 2 \int_M^{+\infty} x e^{-xt} \cos t dt, \\ &= 2 e^{-Mx} \cos M - 2 \int_M^{+\infty} x e^{-xt} \cos t dt. \end{aligned} \quad (2.53)$$

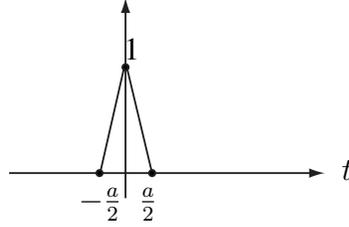
Puisque $|a - b| \leq |a| + |b|$, on déduit successivement

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_M^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt \right| &\leq 2 e^{-Mx} |\cos M| + 2 \int_M^{+\infty} x e^{-xt} |\cos t| dt, \\ &\leq 2 e^{-Mx} + 2 \int_M^{+\infty} x e^{-xt} dt = 4 e^{-Mx}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

et le deuxième terme de (2.52) peut être majoré en valeur absolue

$$\left| 2 \int_0^{+\infty} dx \int_M^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt \right| \leq \int_0^{+\infty} 4 e^{-Mx} dx = \left[\frac{4 e^{-Mx}}{-M} \right]_0^{+\infty} = \frac{4}{M}, \quad (2.55)$$

et cette dernière tend vers 0 lorsque $M \rightarrow +\infty$.

FIGURE 2.4 – Graphe du signal triangulaire tri_a .

Le premier terme de (2.52) peut être calculé en considérant

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \, dt &= \mathcal{I} \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-xt+jt} \, dt \right) \\
 &= 2 \left[\mathcal{I} \left(\frac{e^{(j-x)t}}{j-x} \right) \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \\
 &= 2 \left[\mathcal{I} \left(\frac{e^{(j-x)t}(j+x)}{-1-x^2} \right) \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \\
 &= 2 \left[\left(\frac{-e^{-xt}(\cos t + x \sin t)}{1+x^2} \right) \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \\
 &= \frac{2}{1+x^2}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Par conséquent, la limite pour $M \rightarrow +\infty$ de (2.49) finit par nous donner

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) \, dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} 2 \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{M \rightarrow +\infty} [\text{arctg } x]_0^M = \pi. \tag{2.57}$$

□

2.2.3 Signal triangulaire

Le signal triangulaire de base $a > 0$ est défini par

$$\text{tri}_a(t) = \begin{cases} 1 - 2 \frac{|t|}{a} & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.58}$$

Son graphe est représenté sur la figure 2.4.

Étant intégrable dans \mathbb{R} et pair, sa transformée de Fourier est donnée par

$$\mathcal{F}_\omega[\text{tri}_a(t)] = 2 \int_0^{+\infty} \text{tri}_a(t) \cos(\omega t) \, dt = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{2t}{a} \right) \cos(\omega t) \, dt. \tag{2.59}$$

Si $\omega = 0$, on a

$$\mathcal{F}_0[\text{tri}_a(t)] = 2 \left[t - \frac{t^2}{a} \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a}{2}. \tag{2.60}$$

Si $\omega \neq 0$, une intégration par parties conduit à

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\omega[\text{tri}_a(t)] &= \frac{2}{\omega} \left[\left(1 - \frac{2t}{a}\right) \sin(\omega t) \right]_0^{\frac{a}{2}} + \frac{4}{a\omega} \int_0^{\frac{a}{2}} \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{4}{a\omega} \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{4}{a\omega^2} \left(1 - \cos \frac{a\omega}{2}\right) \\ &= \frac{8}{a\omega^2} \sin^2 \left(\frac{a\omega}{4}\right) = \frac{a}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{a\omega}{4}\right).\end{aligned}\quad (2.61)$$

Par conséquent, on obtient

$$\text{tri}_a(t) \leftrightarrow \frac{a}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{a\omega}{4}\right).\quad (2.62)$$

2.2.4 Carré du sinus cardinal

Par dualité de la relation (2.62), on déduit que

$$\frac{a}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{at}{4}\right) \leftrightarrow 2\pi \text{tri}_a(-\omega)\quad (2.63)$$

ou encore, en remplaçant a par $4a$,

$$2a \text{sinc}^2(at) \leftrightarrow 2\pi \text{tri}_{4a}(\omega),\quad (2.64)$$

c'est-à-dire

$$\text{sinc}^2(at) \leftrightarrow \frac{\pi}{a} \text{tri}_{4a}(\omega).\quad (2.65)$$

En particulier, si $a = 1$, on peut déduire l'intégrale remarquable sur \mathbb{R}

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \mathcal{F}_0 \left[\frac{\sin^2 t}{t^2} \right] = \pi \text{tri}(0) = \pi.\quad (2.66)$$

2.2.5 L'exponentielle décroissante bilatérale

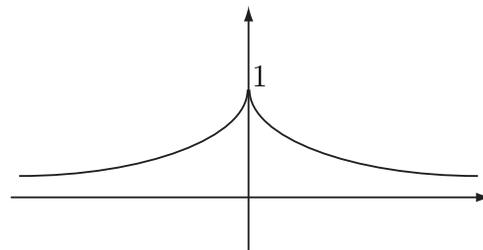


FIGURE 2.5 – Graphe de l'exponentielle décroissante bilatérale $e^{-a|t|}$.

Le signal exponentiel décroissant de facteur d'atténuation $a > 0$ est défini par

$$e^{-a|t|}.\quad (2.67)$$

Son graphe est représenté sur la figure 2.5.

Ce signal étant pair et intégrable sur \mathbb{R} , il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\omega [e^{-a|t|}] &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(\omega t) dt = 2\mathcal{R} \int_0^{+\infty} e^{(-a+j\omega)t} dt \\ &= 2\mathcal{R} \left[\frac{e^{(-a+j\omega)t}}{-a+j\omega} \right]_0^{+\infty} = 2\mathcal{R} \left(\frac{1}{a-j\omega} \right) \\ &= 2\mathcal{R} \left(\frac{a+j\omega}{a^2+\omega^2} \right) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.\end{aligned}\tag{2.68}$$

Par conséquent, on a

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2},\tag{2.69}$$

et on établit par dualité

$$\frac{1}{a^2+t^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.\tag{2.70}$$

2.2.6 La gaussienne

La très importante fonction gaussienne se définit

$$e^{-at^2},\tag{2.71}$$

avec $a > 0$. Son graphe est représenté sur la figure 2.6.

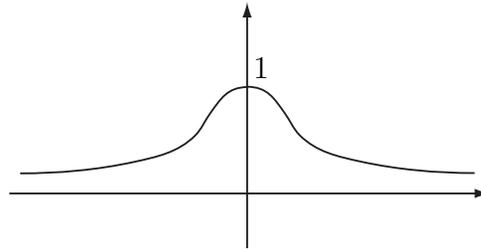


FIGURE 2.6 – Graphe de la gaussienne e^{-at^2} .

Cette fonction est intégrable dans \mathbb{R} et paire, sa transformée de Fourier est donnée par

$$F(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(\omega t) dt.\tag{2.72}$$

Pour la nécessité du calcul, nous avons besoin de la dérivée de F

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega} F(\omega) &= 2 \frac{d}{d\omega} \left(\int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(\omega t) dt \right) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\omega} (e^{-at^2} \cos(\omega t)) dt \\ &= -2 \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-at^2} \sin(\omega t) dt\end{aligned}$$

la dérivation sous le signe d'intégration étant ici autorisée. En calculant cette dernière intégrale par parties, il vient

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \frac{1}{a} \left[e^{-at^2} \sin(\omega t) \right]_0^{+\infty} - \frac{\omega}{a} \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(\omega t) dt = -\frac{\omega}{2a} F(\omega). \quad (2.73)$$

Le spectre $F(\omega)$ satisfait donc à l'équation différentielle à variables séparables

$$\frac{dF}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a} F \quad (2.74)$$

dont la solution générale est

$$F(\omega) = K e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \quad (K \in \mathbb{R}). \quad (2.75)$$

Pour déterminer la constante d'intégration, nous allons utiliser la valeur connue de l'intégrale de Poisson

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (2.76)$$

de sorte que

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} = K. \quad (2.77)$$

Ainsi, on a

$$e^{-at^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \quad (2.78)$$

La transformée de Fourier d'une gaussienne est donc une autre gaussienne dont la largeur est inversement proportionnelle à la largeur de la gaussienne initiale.

2.3 Propriétés de la transformée de Fourier

2.3.1 Opérations élémentaires

Proposition 2.7 (Spectre d'une combinaison linéaire). *Si*

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \text{et} \quad g(t) \leftrightarrow G(\omega), \quad (2.79)$$

alors

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \leftrightarrow \lambda F(\omega) + \mu G(\omega), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \quad (2.80)$$

Démonstration. En effet, le spectre de la fonction $\lambda f(t) + \mu g(t)$ est donné par

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-j\omega t} dt &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \lambda F(\omega) + \mu G(\omega). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.8 (Spectre du signal conjugué). *Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, alors*

$$\overline{f(t)} \leftrightarrow \overline{F(-\omega)}. \quad (2.81)$$

Démonstration. De fait, le spectre de la fonction $\overline{f(t)}$ est donné par

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t) e^{j\omega t}} dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt} \\ &= \overline{F(-\omega)}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.9 (Spectres des parties réelles ou imaginaires). *Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, alors*

$$\mathcal{R}f(t) \leftrightarrow \frac{F(\omega) + \overline{F(-\omega)}}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}f(t) \leftrightarrow \frac{F(\omega) - \overline{F(-\omega)}}{2j}. \quad (2.82)$$

Démonstration. Ces résultats s'obtiennent en observant que

$$\mathcal{R}f(t) = \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2}, \quad \mathcal{I}f(t) = \frac{f(t) - \overline{f(t)}}{2j} \quad (2.83)$$

et en utilisant les propositions 2.7 et 2.8. □

2.3.2 Modification dans le domaine temporel

Proposition 2.10 (Translation d'un signal). *Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ et si $t_0 \in \mathbb{R}$, alors*

$$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega). \quad (2.84)$$

Démonstration. Si, dans l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \quad (2.85)$$

représentant le spectre de la fonction $f(t - t_0)$, nous posons $t - t_0 = \tau$, cette intégrale devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega(t_0 + \tau)} d\tau = e^{-j\omega t_0} F(\omega). \quad (2.86)$$

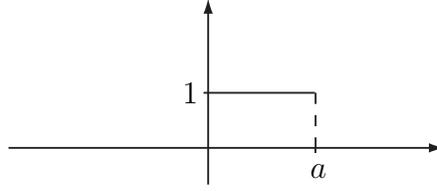
□

Les fonctions $f(t)$ et $f(t - t_0)$ ont le même spectre de modules puisque

$$|e^{-j\omega t_0} F(\omega)| = |F(\omega)|, \quad (2.87)$$

mais pas le même spectre d'arguments car

$$\arg(e^{-j\omega t_0} F(\omega)) = \arg F(\omega) - \omega t_0. \quad (2.88)$$

FIGURE 2.7 – Graphe du signal rect_a translaté de $\frac{a}{2}$.

Exemple 2.11. *Le spectre du signal*

$$f(t) = \text{rect}_a \left(t - \frac{a}{2} \right) \quad (2.89)$$

représenté sur la figure 2.7 est donné par

$$a e^{-j\frac{a\omega}{2}} \text{sinc} \left(\frac{a\omega}{2} \right). \quad (2.90)$$

Proposition 2.12 (Facteur d'échelle). *Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ et si $a \neq 0$, alors*

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F \left(\frac{\omega}{a} \right). \quad (2.91)$$

En particulier, si $a = -1$, il s'agit d'une inversion du temps

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow f(-t) \leftrightarrow F(-\omega). \quad (2.92)$$

Démonstration. Envisageons le cas où $a < 0$. Le spectre de $f(at)$ est donné par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.93)$$

En posant $\tau = at$, cette intégrale devient

$$\int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} F \left(\frac{\omega}{a} \right). \quad (2.94)$$

On procède de la même manière dans le cas où $a > 0$. □

On en déduit la propriété suivante sur la parité d'un signal.

Proposition 2.13 (Parité d'un signal). *Un signal est pair (resp. impair) si et seulement si son spectre est pair (resp. impair).*

Démonstration. Soit $f(t)$ un signal de spectre $F(\omega)$. D'après (2.92), on a

$$f(t) \text{ pair} \Leftrightarrow f(-t) = f(t) \Leftrightarrow F(-\omega) = F(\omega) \Leftrightarrow F(\omega) \text{ pair}. \quad (2.95)$$

On raisonne de même pour un signal impair. □

2.3.3 Modification dans le domaine fréquentiel

Proposition 2.14 (Déphasage d'un signal). Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ et si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$f(t) e^{jat} \leftrightarrow F(\omega - a). \quad (2.96)$$

Démonstration. De fait, le spectre de $f(t)e^{jat}$ est donné par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{jat} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega-a)t} dt = F(\omega - a). \quad (2.97)$$

□

Proposition 2.15 (Théorème de modulation). Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ et si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(t) \cos(at) &\leftrightarrow \frac{1}{2} F(\omega - a) + \frac{1}{2} F(\omega + a) \\ f(t) \sin(at) &\leftrightarrow \frac{1}{2j} F(\omega - a) - \frac{1}{2j} F(\omega + a). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme

$$\cos(at) = \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}, \quad (2.98)$$

on a

$$f(t) \cos(at) = \frac{1}{2} f(t) e^{jat} + \frac{1}{2} f(t) e^{-jat}, \quad (2.99)$$

d'où

$$f(t) \cos(at) \leftrightarrow \frac{1}{2} F(\omega - a) + \frac{1}{2} F(\omega + a) \quad (2.100)$$

en vertu des propositions 2.7 et 2.14.

Le spectre de $f(t) \sin(at)$ s'obtient de manière analogue en partant de

$$\sin(at) = \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j}. \quad (2.101)$$

□

Exemple 2.16. Comme, pour $\mathcal{R}\alpha > 0$, on a d'après (2.28)

$$e^{-\alpha t} \text{ech}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}, \quad (2.102)$$

il vient

$$\mathcal{F}_\omega [e^{-\alpha t} \cos(bt) \text{ech}(t)] = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha + j(\omega - b)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha + j(\omega + b)}, \quad (2.103)$$

soit

$$e^{-\alpha t} \cos(bt) \text{ech}(t) \leftrightarrow \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + b^2}. \quad (2.104)$$

D'autre part, il vient

$$\mathcal{F}_\omega [e^{-\alpha t} \sin(bt) \text{ech}(t)] = \frac{1}{2j} \frac{1}{\alpha + j(\omega - b)} - \frac{1}{2j} \frac{1}{\alpha + j(\omega + b)}, \quad (2.105)$$

c'est-à-dire

$$e^{-\alpha t} \sin(bt) \text{ech}(t) \leftrightarrow \frac{b}{(\alpha + j\omega)^2 + b^2}. \quad (2.106)$$

2.3.4 Dérivation

Proposition 2.17 (Dérivation dans le domaine temporel). *Soit $f(t)$ une fonction intégrable et continûment dérivable dans \mathbb{R} , de spectre $F(\omega)$. Si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0, \quad (2.107)$$

alors

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega). \quad (2.108)$$

Démonstration. De fait, une intégration par parties dans l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt, \quad (2.109)$$

représentant le spectre de $f'(t)$, la transforme en

$$[f(t)e^{-j\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = j\omega F(\omega) \quad (2.110)$$

puisque

$$|f(t)e^{-j\omega t}| = |f(t)| \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow \infty. \quad (2.111)$$

□

Exemple 2.18. *De la transformée de Fourier du signal exponentiel décroissant bilatéral ($a > 0$)*

$$\frac{1}{t^2 + a^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} \quad (2.112)$$

on déduit

$$\frac{-2t}{(t^2 + a^2)^2} \leftrightarrow j\omega \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}, \quad (2.113)$$

soit

$$\frac{t}{(t^2 + a^2)^2} \leftrightarrow -j \frac{\pi}{2a} \omega e^{-a|\omega|}. \quad (2.114)$$

La proposition 2.17 reste valable sous les hypothèses $f \in C_1(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ et $\frac{df(t)}{dt} \in L_1(\mathbb{R})$ auquel cas on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0. \quad (2.115)$$

En effet, la fonction

$$\frac{d}{dt} [f(t)e^{-j\omega t}] = \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} - j\omega f(t)e^{-j\omega t} \in C_0(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}). \quad (2.116)$$

D'après le théorème fondamental du calcul intégral, sa primitive $f(t)e^{-j\omega t}$ possède des limites finies en $\pm\infty$, qui ne peuvent être que nulles car $f(t)e^{-j\omega t} \in L_1(\mathbb{R})$. La proposition 2.17 s'étend naturellement aux dérivées d'ordre supérieur.

Proposition 2.19 (Dérivation temporelle d'ordre supérieur). *Soit $f(t)$ une fonction intégrable et m fois continûment dérivable dans \mathbb{R} , de spectre $F(\omega)$. Si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^k f(t)}{dt^k} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m-1; \quad (2.117)$$

ou si

$$\frac{d^k f(t)}{dt^k} \in L_1(\mathbb{R}), \quad \forall k = 1, \dots, m; \quad (2.118)$$

alors

$$\frac{d^m f(t)}{dt^m} \leftrightarrow (j\omega)^m F(\omega). \quad (2.119)$$

Proposition 2.20 (Dérivée dans le domaine fréquentiel). *Soit $f(t)$ une fonction intégrable dans \mathbb{R} de spectre $F(\omega)$. Si $t f(t) \in L_1(\mathbb{R})$, alors $F(\omega) \in C_1(\mathbb{R})$ et on a*

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = -j \mathcal{F}_\omega[t f(t)]. \quad (2.120)$$

Démonstration. Le spectre

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.121)$$

est une intégrale *paramétrique* dont la valeur dépend de la variable (ou du *paramètre*) ω . Il résulte de la théorie des intégrales paramétriques que $F(\omega) \in C_1(\mathbb{R})$ si l'intégrande $f(t)e^{-j\omega t} \in C_1(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et si sa dérivée est intégrable³ dans \mathbb{R} .

Ces conditions sont réalisées puisque

$$\frac{d}{d\omega}(f(t)e^{-j\omega t}) = -jt f(t)e^{-j\omega t} \in L_1(\mathbb{R}) \quad (2.123)$$

étant donné que

$$|-jt f(t)e^{-j\omega t}| = |t f(t)| \in L_1(\mathbb{R}). \quad (2.124)$$

Dans ces conditions, la dérivée de $F(\omega)$ s'obtient en dérivant sous le signe d'intégration, de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{dF(\omega)}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\omega}(f(t)e^{-j\omega t}) dt \\ &= -j \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)e^{-j\omega t} dt = -j \mathcal{F}_\omega[t f(t)]. \end{aligned}$$

□

3. Plus précisément, la dérivée de l'intégrande doit être majorée en module dans tout compact $[\omega_0, \omega_1] \subset \mathbb{R}$ par une fonction $g_K(t) \in L_1(\mathbb{R})$. C'est le cas puisque

$$\max_{\omega \in [\omega_0, \omega_1]} |-jt f(t)e^{-j\omega t}| = |t f(t)| \in L_1(\mathbb{R}). \quad (2.122)$$

La proposition 2.20 s'étend naturellement aux dérivées d'ordre supérieur.

Proposition 2.21 (Dérivées fréquentielles d'ordre supérieur). *Soit $f(t)$ une fonction intégrable dans \mathbb{R} et de spectre $F(\omega)$. Si*

$$t^k f(t) \in L_1(\mathbb{R}), \quad \forall k = 1, \dots, m, \quad (2.125)$$

alors $F(\omega) \in C_m(\mathbb{R})$ et on a

$$\frac{d^k F(\omega)}{d\omega^k} = (-j)^k \mathcal{F}_\omega[t^k f(t)], \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (2.126)$$

Dans les conditions de la proposition 2.21, on a

$$\mathcal{F}_\omega[t^m f(t)] = \frac{1}{(-j)^m} \frac{d^m F(\omega)}{d\omega^m} = j^m \frac{d^m F(\omega)}{d\omega^m} \quad (2.127)$$

de sorte que

$$t^m f(t) \leftrightarrow j^m \frac{d^m F(\omega)}{d\omega^m}. \quad (2.128)$$

Cette formule est couramment utilisée, elle permet d'obtenir le spectre de $t^m f(t)$ à partir de celui de $f(t)$.

Exemple 2.22. *Comme établi dans la formule (2.28),*

$$e^{-\alpha t} \text{ech}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \text{si } \Re \alpha > 0, \quad (2.129)$$

on a

$$t e^{-\alpha t} \text{ech}(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} \right) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}. \quad (2.130)$$

2.3.5 Énergie d'un signal

L'énergie du signal analogique $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ est définie par

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.131)$$

Son interprétation physique est évidente si on remarque que, pour un signal périodique, il s'agit de l'intégrale sur le temps de sa *puissance* de la définition 1.26.

Proposition 2.23 (Formule de Parseval). *Soit f une fonction continûment dérivable par morceaux et intégrable dans \mathbb{R} de spectre $F(\omega)$. Si $f \in L_2(\mathbb{R})$, alors*

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.132)$$

Démonstration. On a, d'après le théorème de Fourier 2.3,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{f(t)} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \overline{F(\omega)} d\omega \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\overline{F(\omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega, \tag{2.133}
 \end{aligned}$$

le changement de l'ordre d'intégration étant autorisé puisque les intégrandes sont à variables séparables et que les bornes des intégrales ne dépendent pas les unes des autres. On obtient ensuite

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(\omega)} F(\omega) d\omega. \tag{2.134}$$

□

La formule de Parseval s'interprète en terme d'énergie : le premier membre représente l'énergie totale du signal $f(t)$ dans le domaine temporel alors que le second membre représente l'énergie totale du même signal calculée dans le domaine fréquentiel.

2.4 Transformée de Fourier de distributions

La théorie des transformées de Fourier nous a amené à *généraliser* certaines notions, nous l'avons vu avec les intégrales fléchées et la proposition 2.6. La justification rigoureuse de ces généralisations peut s'avérer très laborieuse alors que les implications pratiques sont, quant à elles, relativement simples.

Il existe un cadre théorique appelé *théorie des distributions* qui permet d'envisager des êtres mathématiques qui ressemblent à des fonctions, qui ont des propriétés similaires mais qui ne sont pas *stricto sensu* des fonctions au sens de l'analyse mathématique.

Nous allons aborder quelques-unes de ces *distributions* à l'aide de définitions plus intuitives. Nous admettrons que les propriétés de la transformée de Fourier des fonctions s'étendent aux distributions.

2.4.1 Distribution de Dirac

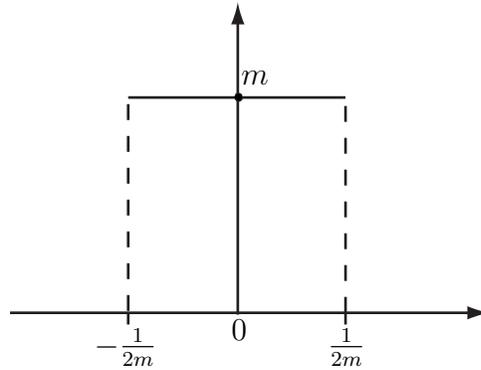
Donnons d'abord une définition intuitive de la distribution de Dirac : considérons les fonctions *portes de Dirac* correspondant à une impulsion de hauteur m restreintes à l'intervalle $[-\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m}]$ (voir figure 2.8)

$$f_m(t) = m \operatorname{rect}_{\frac{1}{m}}(t). \tag{2.135}$$

On remarque que la porte de Dirac a la dimension de l'inverse de sa variable (tout comme la distribution) puisque t et $1/m$ doivent avoir la même dimension.

On constate que $f_m(t) \in L_1(\mathbb{R})$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) dt = 1. \tag{2.136}$$

FIGURE 2.8 – Porte de Dirac de hauteur m et de largeur $1/m$.

On définit intuitivement la *distribution de Dirac* comme étant la limite, au sens des distributions, des fonctions f_m ,

$$\delta(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty}^{\mathcal{D}} f_m(t). \quad (2.137)$$

Pour simplifier les écritures, nous utiliserons désormais une notation de limite classique. La distribution de Dirac est donc un être mathématique qui prend la valeur 0 partout sauf en $t = 0$ où elle tend vers l'infini.

Intégrale de la distribution de Dirac

La notion d'intégrale peut être généralisée aux distributions et c'est là que la distribution de Dirac est intéressante, car elle est définie de manière à vérifier la propriété suivante. Nous l'accepterons sans démonstration, telle une définition.

Proposition 2.24 (Distribution de Dirac). *Si ψ est une fonction continue dans un voisinage V_0 de 0, on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\psi(t) dt = \psi(0) \quad (2.138)$$

et, en particulier, on dit que δ représente une impulsion ponctuelle d'intensité égale à 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.139)$$

Si ψ est une fonction continue dans un voisinage V_0 de 0, sauf en 0 où elle possède une discontinuité de première espèce, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\psi(t) dt = \frac{1}{2}[\psi(0^-) + \psi(0^+)]. \quad (2.140)$$

Il résulte de la proposition 2.24 que la distribution de Dirac caractérise une impulsion ponctuelle en 0 de grandeur non définie, que l'on représente par une flèche verticale de hauteur 1 au point 0 (voir figure 2.9). Si $a \in \mathbb{R}_0$, on représente la distribution $a\delta(t)$ par une flèche de hauteur $|a|$ au point 0, dirigée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

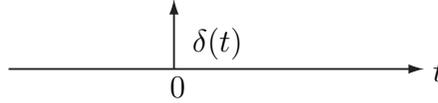


FIGURE 2.9 – Représentation du graphe de la distribution de Dirac.

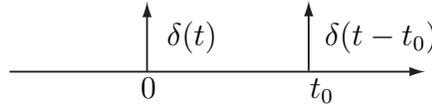


FIGURE 2.10 – Distribution de Dirac traduite en t_0 . Les relations (2.149) et (2.150) traduisent le fait que la distribution $\delta(t - t_0)$ caractérise une impulsion ponctuelle en t_0 de grandeur non définie, que l'on représente par une flèche verticale de hauteur 1 au point t_0 . Si $a \in \mathbb{R}_0$, on représente la distribution $a\delta(t - t_0)$ par une flèche de hauteur $|a|$ au point t_0 , dirigée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

Transformée de Fourier

On a

$$\mathcal{F}_\omega[\delta(t)] = 1, \quad (2.141)$$

puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^0 = 1 \quad (2.142)$$

et, par dualité (proposition 2.5), on a

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega), \quad (2.143)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_\omega 1 = 2\pi\delta(\omega). \quad (2.144)$$

Par abus de notation, on l'écrit aussi sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega), \quad (2.145)$$

bien que l'intégrale du premier membre ne soit pas une intégrale ordinaire.

Distribution de Dirac décalée

À l'instar des fonctions, la distribution $\delta(t - t_0)$ s'obtient en traduisant la distribution de Dirac $\delta(t)$ au point t_0 pour situer l'impulsion en t_0 (voir figure 2.10). Dans ce cas, on a évidemment les propriétés suivantes.

Si ψ est une fonction continue dans un voisinage V_{t_0} de t_0 , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\psi(t) dt = \psi(t_0). \quad (2.146)$$

Si ψ est une fonction continue dans un voisinage V_{t_0} de t_0 , sauf en t_0 où elle possède une discontinuité de première espèce,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \psi(t) dt = \frac{1}{2} [\psi(t_0^-) + \psi(t_0^+)]. \quad (2.147)$$

Si ψ est une fonction continue dans un voisinage de t_0 , on a

$$\psi(t) \delta(t - t_0) = \psi(t_0) \delta(t - t_0). \quad (2.148)$$

On a

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad \forall t \neq t_0 \quad (2.149)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (2.150)$$

Par application de la proposition 2.10, on obtient

$$\mathcal{F}_\omega[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0}; \quad (2.151)$$

par dualité, puis en remplaçant t_0 par $-a$, on a

$$\mathcal{F}_\omega [e^{jat}] = 2\pi \delta(\omega - a) \quad (2.152)$$

et, à l'aide de la proposition 2.15, on a

$$\mathcal{F}_\omega [\cos(at)] = \pi [\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)], \quad (2.153)$$

$$\mathcal{F}_\omega [\sin(at)] = -j\pi [\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)]. \quad (2.154)$$

Dérivée de la distribution de Dirac

La notion de dérivée peut être généralisée aux distributions et permet de dériver certaines fonctions présentant des discontinuités. Pour dériver une fonction f au sens des distributions, on dérive f partout où c'est possible et aux points t_0 où f n'est pas dérivable et possède une discontinuité de première espèce, on fait apparaître le *saut*

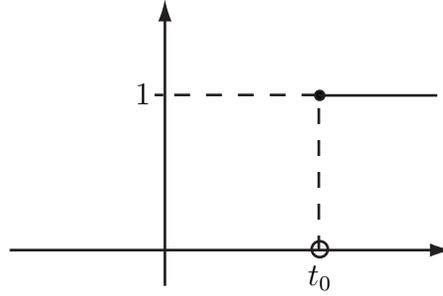
$$[f(t_0^+) - f(t_0^-)] \delta(t - t_0). \quad (2.155)$$

Exemple 2.25. On a

$$\frac{d}{dt} \text{ech}(t - t_0) = \delta(t - t_0) \quad (2.156)$$

puisque le graphe de la fonction $\text{ech}(t - t_0)$ se présente comme sur la figure 2.11. La dérivée est nulle partout sauf en t_0 où elle vaut

$$\left[\lim_{t \rightarrow t_0^+} \text{ech}(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} \text{ech}(t) \right] \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0)$$

FIGURE 2.11 – Échelon unité décalé en t_0 .

Les dérivées successives de la distribution de Dirac elle-même peuvent-être définies à l'aide des transformées de Fourier et de la propriété 2.19 relative à la dérivation dans le domaine temporel

$$\mathcal{F}_\omega \left[\frac{d^m \delta(t)}{dt^m} \right] = (j\omega)^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \quad (2.157)$$

et par dualité

$$j^m t^m \leftrightarrow 2\pi (-1)^m \frac{d^m \delta(\omega)}{d\omega^m} \quad (2.158)$$

ou encore

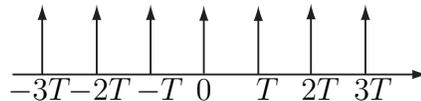
$$\mathcal{F}_\omega(t^m) = 2\pi j^m \frac{d^m \delta(\omega)}{d\omega^m}. \quad (2.159)$$

2.4.2 Peigne de Dirac

On appelle *peigne de Dirac* de période $T > 0$ la somme des impulsions de Dirac aux points kT avec $k \in \mathbb{Z}$. Il s'agit d'une distribution, notée $\text{pgn}_T(t)$, et définie par

$$\text{pgn}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT). \quad (2.160)$$

On la représente à l'aide du graphe de la figure 2.12.

FIGURE 2.12 – Peigne de Dirac de période T .

Si la fonction $\psi \in C_0(\mathbb{R})$, on a une fonction analogique reproduisant un échantillonnage à l'aide du peigne de Dirac

$$\psi(t) \text{pgn}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi(kT) \delta(t - kT). \quad (2.161)$$

Exemple 2.26. La fonction partie entière $\text{PE}(t)$ de l'exemple 1.11 a pour dérivée

$$\frac{d}{dt}\text{PE}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k) = \text{pgn}_1(t)$$

puisque le graphe (figure 1.2) de PE possède des sauts de hauteur 1 en chaque entier k .

Proposition 2.27. La transformée de Fourier du peigne de Dirac de période $T > 0$

$$\text{pgn}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (2.162)$$

est donnée par

$$\mathcal{F}_\omega[\text{pgn}_T(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0) \quad (2.163)$$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Démonstration. La distribution $\text{pgn}_T(t)$, étant périodique de période T , est développable en série de Fourier⁴

$$\text{pgn}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.164)$$

où, d'après la formule (1.30),

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{pgn}_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} e^0 = \frac{1}{T}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\text{pgn}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t}. \quad (2.165)$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{F}_\omega[\text{pgn}_T(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \mathcal{F}_\omega [e^{jk\omega_0 t}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \text{pgn}_{\omega_0}(\omega), \quad (2.166)$$

d'où le résultat. □

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de période T est un peigne de Dirac de période $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, dont toutes les impulsions ont une intensité égale à ω_0 .

4. Nous admettons que le théorème de Dirichlet (proposition 1.15) s'étend aux distributions.

2.4.3 La distribution valeur principale

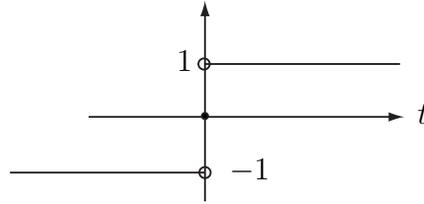


FIGURE 2.13 – Graphe du signal $\text{sgn}(t)$.

Introduisons d'abord le signal *signe* (voir figure 2.13)

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (2.167)$$

La *valeur principale* de $\frac{1}{t}$ est définie *intuitivement* par

$$\text{VP} \left(\frac{1}{t} \right) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (2.168)$$

La distribution *valeur principale* est liée à la transformée de Fourier de sgn

$$\mathcal{F}_\omega[\text{sgn}(t)] = -2j \text{VP} \left(\frac{1}{\omega} \right). \quad (2.169)$$

En partant de

$$\text{sgn}(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(t) \quad \text{où} \quad f_m(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{m}} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -e^{\frac{t}{m}} & \text{si } t < 0; \end{cases} \quad (2.170)$$

on obtient

$$\mathcal{F}_\omega[\text{sgn}(t)] = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_\omega[f_m(t)]. \quad (2.171)$$

Il vient dès lors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\omega[f_m(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{\frac{t}{m} - j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{m} - j\omega t} dt \\ &= - \left[\frac{e^{\frac{t}{m} - j\omega t}}{\frac{1}{m} - j\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-\frac{t}{m} - j\omega t}}{-\frac{1}{m} - j\omega} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{-\frac{1}{m} - j\omega + \frac{1}{m} - j\omega}{\frac{1}{m^2} + \omega^2} \\ &= -2j \frac{m^2 \omega}{1 + m^2 \omega^2} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathcal{F}_\omega \operatorname{sgn}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{2j}{\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \end{array} \right\} = -2j \operatorname{VP} \left(\frac{1}{\omega} \right). \quad (2.172)$$

Remarque 2.28. Le principe de dualité assure que

$$-2j \operatorname{VP} \left(\frac{1}{t} \right) \leftrightarrow 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi \operatorname{sgn}(\omega), \quad (2.173)$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{VP} \left(\frac{1}{t} \right) \leftrightarrow -j\pi \operatorname{sgn}(\omega). \quad (2.174)$$

2.4.4 L'échelon-unité

La transformée de Fourier de l'échelon-unité est liée à la distribution de Dirac et de la valeur principale :

$$\mathcal{F}_\omega[\operatorname{ech}(t)] = \pi\delta(\omega) - j \operatorname{VP} \left(\frac{1}{\omega} \right). \quad (2.175)$$

En effet, comme

$$\operatorname{ech}(t) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(t)], \quad (2.176)$$

on a

$$\mathcal{F}_\omega[\operatorname{ech}(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}_\omega 1 + \frac{1}{2} \mathcal{F}_\omega[\operatorname{sgn}(t)] = \pi\delta(\omega) - j \operatorname{VP} \left(\frac{1}{\omega} \right). \quad (2.177)$$

2.4.5 Spectre discret d'une fonction périodique

La théorie des distributions permet de montrer que la transformée de Fourier d'un signal périodique donne un spectre discret qui est précisément le spectre de la série de Fourier du signal.

Proposition 2.29. Soit $f(t)$ une fonction périodique de période T , continûment dérivable par morceaux dans \mathbb{R} et de motif $f_0(t)$. Si $F_0(\omega)$ désigne le spectre de f_0 , alors

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.178)$$

où

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \omega_0 F_0(k\omega_0). \quad (2.179)$$

Démonstration. D'après la formule (1.30), on a

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} F_0(k\omega_0). \end{aligned}$$

□

Le spectre discret d'une fonction périodique f s'identifie à son spectre continu $\mathcal{F}_\omega f$ aux points $k\omega_0$ au facteur $\frac{1}{2\pi}$ près.

2.5 Résolution de l'équation de la chaleur

Nous nous proposons de résoudre l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0 \quad (2.180)$$

où c désigne une constante > 0 . La fonction $u(x, t)$ décrit la distribution de la température dans une tige de longueur infinie à l'instant $t > 0$. Nous imposons la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.181)$$

Introduisons la fonction

$$U(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-j\omega x} dx \quad (2.182)$$

représentant la transformée de Fourier de $u(x, t)$ sur la variable x . Elle est définie pour $\omega \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ si $u(x, t)$ est intégrable dans \mathbb{R} par rapport à la variable x , quel que soit $t > 0$.

En prenant la transformée de Fourier sur la variable x des deux membres de l'équation (2.180), on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-j\omega x} dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-j\omega x} dx, \quad (2.183)$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\omega, t) = c(j\omega)^2 U(\omega, t) \quad (2.184)$$

en supposant que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_1(\mathbb{R})$ par rapport à x , pour tout $t > 0$. Nous substituons ainsi à l'équation aux dérivées partielles (2.180) les équations différentielles

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\omega, t) = -c\omega^2 U(\omega, t), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.185)$$

de solutions générales

$$U(\omega, t) = K(\omega) e^{-c\omega^2 t}. \quad (2.186)$$

On détermine la fonction $K(\omega)$ en exploitant la condition initiale. Comme

$$U(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-j\omega x} dx = F(\omega) \quad (2.187)$$

où $F(\omega)$ désigne le spectre de $f(x)$, il s'ensuit que $K(\omega) = F(\omega)$, d'où

$$U(\omega, t) = F(\omega) e^{-c\omega^2 t}. \quad (2.188)$$

On retrouve l'expression de la solution $u(x, t)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-c\omega^2 t} e^{j\omega x} d\omega. \quad (2.189)$$

Applications

2.5.1 Exercices

1) Déterminer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

a) $f(t) = 3e^{-2|t|} + 2j \operatorname{tri}_{2a}(t)$;

b) $f(t) = e^{-7|t|} \cos \pi t$;

c) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$

e) $f(t) = \delta_{[0,a]}(t)$, ($a > 0$);

f) $f(t) = \delta_{[a,b]}(t)$, ($a, b \in \mathbb{R}; a < b$);

g) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{a}{2}, \\ -1 & \text{si } -\frac{a}{2} \leq t < 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (a > 0)$;

h) $f(t) = \begin{cases} 2t - 2 & \text{si } t \in [1, 2], \\ 6 - 2t & \text{si } t \in [2, 3], \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$

i) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [1, 2], \\ 4 - t & \text{si } t \in [2, 3], \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$

j) $f(t) = \begin{cases} t + 2 & \text{si } t \in [-2, -1], \\ 1 & \text{si } t \in [-1, 1], \\ 2 - t & \text{si } t \in [1, 2], \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$

k) $f(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$

l) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -e^t & \text{si } t < 0; \end{cases}$

m) $f(t) = t \operatorname{rect}_a(t)$, ($a > 0$);

n) $f(t) = t e^{-at^2}$, ($a > 0$);

o) $f(t) = t^m e^{-at} \operatorname{ech}(t)$, ($a > 0, m \in \mathbb{N}_0$);

p) $f(t) = \cos bt e^{-a|t|}$, ($a > 0, b \in \mathbb{R}$);

q) $f(t) = \sin bt e^{-a|t|}$, ($a > 0, b \in \mathbb{R}$);

r) $f(t) = \cos bt e^{-at^2}$, ($a > 0, b \in \mathbb{R}$);

s) $f(t) = \sin bt e^{-at^2}$, ($a > 0, b \in \mathbb{R}$);

t) $f(t) = t \cos bt e^{-at} \text{ech}(t)$, ($a > 0, b \in \mathbb{R}$);

u) $f(t) = t \sin bt e^{-at} \text{ech}(t)$, ($a > 0, b \in \mathbb{R}$).

Vérifier dans chaque cas que le spectre $F(\omega)$ est continu dans \mathbb{R} et possède une limite nulle à l'infini.

2) Déterminer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

a) $f(t) = \frac{\sin^2 at}{t^2}$ (par convolution dans le domaine fréquentiel),

b) $f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 2}$,

c) $f(t) = \frac{\sin 2\pi(t-3)}{t-3}$,

d) $f(t) = \frac{\sin 4t}{t^2 - 4t + 7}$,

e) $f(t) = \frac{\sin^2 3(t-1)}{t^2 - 2t + 1}$.

3) Sachant que le spectre de la fonction de Gauss $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ est donné par $G(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$, déterminer le spectre des fonctions suivantes :

a) $f_1(t) = \int_{-\infty}^t \tau g(\tau) d\tau$,

b) $f_2(t) = t^2 g(t)$,

c) $f_3(t) = (t^2 - 2t + 1)e^{-\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2}}$,

d) $f_4(t) = \sin 4t \int_{-\infty}^t \tau g(\tau) d\tau$,

e) $f_5(t) = \cos^2 2t g(t)$,

f) $f_6(t) = e^{-8t^2}$.

4) a) Montrer que $\text{rect}_a(t) \star \text{rect}_a(t) = a \text{tri}_{2a}(t)$.

b) En déduire le spectre de $\text{tri}_{2a}(t)$.

5) On considère la fonction $f(t) = e^{-2t} \text{ech}(t)$.

a) Montrer que $(f \star f)(t) = t e^{-2t} \text{ech}(t)$.

b) Calculer le spectre de la fonction $t e^{-2t} \text{ech}(t)$ de deux manières différentes.

6) On définit la fonction "trapézoïdale" $T(t)$

$$T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1, \\ 2 - |t| & \text{si } 1 < |t| \leq 2, \\ 0 & \text{si } |t| > 2. \end{cases} \quad (2.190)$$

a) Montrer que $T(t) = (\text{rect}_1 \star \text{rect}_3)(t)$. En déduire le spectre de $T(t)$.

b) Montrer que $T(t) = 2 \text{tri}_4(t) - \text{tri}_2(t)$. En déduire le spectre de $T(t)$.

7) Utiliser les formules de Parseval-Plancherel afin de calculer les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \quad (2.191)$$

pour $n = 2, 3, 4$.

8) On considère la fonction $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

a) Vérifier que $f'(t) + t f(t) = 0$.

b) En calculant la transformée de Fourier des deux membres de cette équation différentielle, déterminer le spectre $F(\omega)$ de f .

c) Calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(\omega t) dt$.

9) On considère la fonction $f(t)$ de l'exercice 1) l).

a) Utiliser le théorème de Fourier pour montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{1 + \omega^2} \sin(\omega t) d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-t}, \quad \forall t > 0. \quad (2.192)$$

Pourquoi cette identité n'est-elle pas valable en $t = 0$?

b) Utiliser la formule de Parseval pour montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2}{(1 + \omega^2)^2} d\omega = \frac{\pi}{4}. \quad (2.193)$$

10) Soit $f(t)$ un signal de spectre $F(\omega)$. Montrer que

a) f est imaginaire pur et pair $\Leftrightarrow F$ est imaginaire pur et pair.

b) f est imaginaire pur et impair $\Leftrightarrow F$ est réel et impair.

11) Déterminer la transformée de Fourier inverse des fonctions suivantes :

a) $F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 4}$;

b) $F(\omega) = \text{rect}_{2a}(\omega - \omega_0) + \text{rect}_{2a}(\omega + \omega_0)$, ($a > 0$);

c) $F(\omega) = e^{-3|\omega-9|}$;

d) $F(\omega) = e^{-a\omega^2}$, ($a > 0$);

e) $F(\omega) = \frac{1}{j\omega - \alpha}$, ($\mathcal{R}\alpha > 0$);

f) $F(\omega) = \frac{1}{j\omega - \alpha}$, ($\mathcal{R}\alpha < 0$).

12) a) Déterminer la transformée de Fourier inverse de

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + a^2}, \quad (a > 0). \quad (2.194)$$

b) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}, \quad (a > 0) \quad (2.195)$$

en utilisant la formule de Parseval.

c) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)} = \frac{\pi}{ab(a + b)}, \quad (a, b > 0) \quad (2.196)$$

en utilisant la formule de Plancherel.

13) Déterminer la transformée de Fourier des distributions suivantes :

- a) $\delta(t - 1)$;
- b) $3\delta(t + 2)$;
- c) $\delta(t - 1) + 2\delta(t) + \delta(t + 1)$;
- d) $e^{jat} - 2 + e^{-jat}$, $(a \in \mathbb{R})$;
- e) $\cos^2 \omega_0 t$, $(\omega_0 \in \mathbb{R})$;
- f) $\sin^2 \omega_0 t$, $(\omega_0 \in \mathbb{R})$;
- g) $\sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$, $(\omega_0 \in \mathbb{R})$;
- h) $\cos \omega_0 t \operatorname{ech}(t)$, $(\omega_0 \in \mathbb{R})$;
- i) $\sin \omega_0 t \operatorname{ech}(t)$, $(\omega_0 \in \mathbb{R})$;
- j) $\cos \omega_0 t \operatorname{sgn}(t)$, $(\omega_0 \in \mathbb{R})$;
- k) $\sin \omega_0 t \operatorname{sgn}(t)$, $(\omega_0 \in \mathbb{R})$.

14) Déterminer la transformée de Fourier inverse des distributions suivantes :

- a) $\delta(\omega + 2)$,
- b) $\delta(\omega - 3)$,
- c) $\delta(\omega - 1) - 2\delta(\omega) + \delta(\omega + 1)$,
- d) $\sin \omega$,
- e) $\cos 2\omega$,
- f) $\sin^2 3\omega$,
- g) $\cos^3 4\omega$,
- h) ω^2 ,
- i) $(\omega - 1)^2$,
- j) $\frac{1}{4} e^{j\frac{\omega}{2}}$,
- k) $\omega^3 \sin \omega$,
- l) $\omega \cos(\omega - 4)$.

15) On considère le signal périodique de période T

$$f(t) = \text{rect}_{a,T}(t), \quad (0 < a < T). \quad (2.197)$$

- Ecrire f à l'aide du peigne de Dirac de période T et de la fonction motif f_0 .
- Calculer le spectre $F_0(\omega)$ de f_0 .
- En déduire le spectre $F(\omega)$ de f .
- Vérifier que les coefficients α_k de la série de Fourier de f sont donnés par

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \omega_0 F_0(k\omega_0) \quad (2.198)$$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

16) Reprendre le même exercice avec le signal périodique de période π et de motif

$$f_0(t) = \begin{cases} A \cos 2t & \text{si } |t| \leq \frac{\pi}{4}, A > 0; \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{4} < |t| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.199)$$

17) Reprendre le même exercice avec le signal périodique de période 2 et de motif

$$f_0(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < |t| \leq 1. \end{cases} \quad (2.200)$$

18) La réponse impulsionnelle d'un système LIC est donnée par

$$h(t) = \delta(t) + t e^{-t} \text{ech}(t). \quad (2.201)$$

- Déterminer la réponse fréquentielle de ce système.
- Déterminer sa réponse ou signal d'entrée $x(t) = e^{j\omega t}$.

19) La réponse fréquentielle d'un système LIC est donnée par

$$H(\omega) = \frac{\cos \omega}{\omega^2 + 1}. \quad (2.202)$$

- Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce système.
- Déterminer sa réponse au signal d'entrée $x(t) = \delta(t - 1)$.

20) On considère le système linéaire invariant continu de réponse impulsionnelle

$$h(t) = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.203)$$

et le signal d'entrée $x(t) = \cos t$ de réponse $y(t)$.

- Déterminer la fonction de transfert de ce système.
- Calculer à partir de là le spectre de $y(t)$.
- En déduire l'expression de $y(t)$.
- Retrouver l'expression de $y(t)$ directement à partir de $h(t)$.

21) On considère le système linéaire invariant continu décrit par l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t) = x(t). \quad (2.204)$$

- a) Déterminer la fonction de transfert de ce système.
- b) En déduire sa réponse impulsionnelle $h(t)$.
- c) Calculer $h''(t) - h(t)$.

22) Un circuit électrique est caractérisé par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante

$$12y''(t) + 7y'(t) + y(t) = 2x'(t) + x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.205)$$

où $y(t)$ désigne la réponse du circuit au signal d'entrée $x(t)$.

Déterminer

- a) la fonction de transfert de ce circuit,
- b) l'amplitude et la phase du spectre de $y(t)$ si $x(t) = e^{-t} \text{ech}(t)$,
- c) l'expression de $y(t)$ si $x(t) = e^{-t} \text{ech}(t)$.

23) Trouver la réponse impulsionnelle des systèmes LIC décrits par les systèmes d'équations différentielles

$$\text{a) } \begin{cases} Li''(t) + Ri'(t) = x'(t) \\ Ri'(t) = y'(t), \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = x'(t) \\ Ri'(t) = y'(t). \end{cases}$$

24) Résoudre l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \quad (2.206)$$

sous la condition initiale

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.207)$$

2.5.2 Solutions

1) a) $\frac{12}{\omega^2+4} + 2ja \text{sinc}^2\left(a \frac{\omega}{2}\right)$;

b) $\frac{14(\omega^2+\pi^2+49)}{(\omega^2+\pi^2+49)^2-4\pi^2\omega^2}$;

$$\text{c) } \begin{cases} 2j \frac{\sin(\pi\omega)}{\omega^2-1} & \text{si } |\omega| \neq 1, \\ -j\pi & \text{si } \omega = 1, \\ j\pi & \text{si } \omega = -1; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} -2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{\omega^2-1} & \text{si } |\omega| \neq 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |\omega| = 1; \end{cases}$$

$$e) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1-e^{-j a \omega}}{j \omega} & \text{si } \omega \neq 0, \\ a & \text{si } \omega = 0 \end{array} \right\} = a \operatorname{sinc} \left(\frac{a \omega}{2} \right) e^{-j \frac{a \omega}{2}};$$

$$f) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{e^{-j a \omega} - e^{-j b \omega}}{j \omega} & \text{si } \omega \neq 0, \\ b - a & \text{si } \omega = 0 \end{array} \right\} = (b - a) e^{-j \frac{a+b}{2} \omega} \operatorname{sinc} \left(\frac{(b-a)}{2} \omega \right);$$

$$g) \left\{ \begin{array}{ll} 2j \frac{\cos \frac{a \omega}{2} - 1}{\omega} & \text{si } \omega \neq 0, \\ 0 & \text{si } \omega = 0; \end{array} \right.$$

$$h) 2e^{-2j \omega} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{2} \right);$$

$$i) e^{-2j \omega} \left(2 \operatorname{sinc}(\omega) + \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right);$$

$$j) 4 \operatorname{sinc}^2(\omega) - \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{2} \right);$$

$$k) 2 \operatorname{sinc}(\omega) - \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{2} \right);$$

$$l) -\frac{2j \omega}{\omega^2 + 1};$$

$$m) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2j}{\omega^2} \left[\frac{a \omega}{2} \cos \left(\frac{a \omega}{2} \right) - \sin \left(\frac{a \omega}{2} \right) \right] & \text{si } \omega \neq 0, \\ 0 & \text{si } \omega = 0; \end{array} \right.$$

$$n) -\frac{j}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \omega e^{-\frac{\omega^2}{4a}};$$

$$o) \frac{m!}{(a+j \omega)^{m+1}};$$

$$p) 2a \frac{\omega^2 + a^2 + b^2}{(\omega^2 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2 \omega^2};$$

$$q) \frac{-4jab \omega}{(\omega^2 + a^2 + b^2)^2 - 4b^2 \omega^2};$$

$$r) \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2 + b^2}{4a}} \operatorname{ch} \left(\frac{b \omega}{2a} \right);$$

$$s) -j \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2 + b^2}{4a}} \operatorname{sh} \left(\frac{b \omega}{2a} \right);$$

$$t) \frac{(a+j \omega)^2 - b^2}{[(a+j \omega)^2 + b^2]^2};$$

$$u) \frac{2b(a+j \omega)}{[(a+j \omega)^2 + b^2]^2}.$$

$$2) a) \pi a \operatorname{tri}_{4a}(\omega);$$

$$b) \pi e^{-j \omega} e^{-|\omega|};$$

$$c) \pi e^{-3j \omega} \operatorname{rect}_{4\pi}(\omega);$$

$$d) \frac{-j \pi}{2\sqrt{3}} e^{-2j \omega} \left[e^{8j} e^{-\sqrt{3}|\omega-4|} - e^{-8j} e^{-\sqrt{3}|\omega+4|} \right];$$

$$e) 3\pi e^{-j \omega} \operatorname{tri}_{12}(\omega).$$

$$3) a) -\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \text{ si } \omega \neq 0 \text{ et } 0 \text{ si } \omega = 0,$$

$$b) \sqrt{2\pi} (1 - \omega^2) e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

$$c) \sqrt{2\pi}(1 - \omega^2)e^{-\frac{\omega^2}{2}-j\omega},$$

$$d) 2j \sqrt{2\pi} e^{-8} e^{-\frac{\omega^2}{2}} (\omega \operatorname{sh} 4\omega - 4 \operatorname{ch} 4\omega),$$

$$e) \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}} (1 + e^{-8} \operatorname{ch} 4\omega),$$

$$f) \frac{1}{4} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{32}}.$$

$$4) \text{ b) } \operatorname{tri}_{2a}(t) \leftrightarrow a \operatorname{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right).$$

$$5) \text{ b) } t e^{-2t} \operatorname{ech}(t) \leftrightarrow \frac{1}{(2+j\omega)^2}.$$

$$6) \text{ a) } T(t) \leftrightarrow 3 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{3\omega}{2}\right) = \begin{cases} \frac{2}{\omega^2}(\cos \omega - \cos 2\omega) & \text{si } \omega \neq 0, \\ 3 & \text{si } \omega = 0; \end{cases}$$

$$\text{ b) } T(t) \leftrightarrow 4 \operatorname{sinc}^2(\omega) - \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} \frac{4}{\omega^2}(\sin^2 \omega - \sin^2 \frac{\omega}{2}) & \text{si } \omega \neq 0, \\ 3 & \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

$$7) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 2, \\ \frac{3\pi}{4} & \text{si } n = 3, \\ \frac{2\pi}{3} & \text{si } n = 4. \end{cases}$$

$$8) \text{ b) } F(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

$$c) \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

$$11) \text{ a) } \frac{1}{4} e^{-2|t|},$$

$$\text{ b) } \frac{2a}{\pi} \cos \omega_0 t \operatorname{sinc}(at),$$

$$\text{ c) } \frac{3}{\pi} \frac{e^{9jt}}{t^2+9},$$

$$\text{ d) } \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{-\frac{t^2}{4a}},$$

$$\text{ e) } -\operatorname{ech}(-t)e^{\alpha t},$$

$$\text{ f) } \operatorname{ech}(t)e^{\alpha t}.$$

$$12) \text{ a) } \frac{1}{2a} e^{-a|t|}.$$

$$13) \text{ a) } e^{-j\omega},$$

$$\text{ b) } 3e^{2j\omega},$$

$$\text{ c) } 2 + 2 \cos \omega = 4 \cos^2 \frac{\omega}{2},$$

$$\text{ d) } 2\pi[\delta(\omega - a) - 2\delta(\omega) + \delta(\omega + a)],$$

$$\text{ e) } \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - 2\omega_0) + 2\delta(\omega) + \delta(\omega + 2\omega_0)],$$

$$\text{ f) } \frac{\pi}{2}[-\delta(\omega - 2\omega_0) + 2\delta(\omega) - \delta(\omega + 2\omega_0)],$$

- g) $\frac{j\pi}{2}[\delta(\omega + 2\omega_0) - \delta(\omega - 2\omega_0)],$
h) $\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] - \frac{j}{2} \left[\text{VP} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} \right) + \text{VP} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} \right) \right],$
i) $\frac{j\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} \left[\text{VP} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} \right) - \text{VP} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} \right) \right],$
j) $-j \left[\text{VP} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} \right) + \text{VP} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} \right) \right],$
k) $\text{VP} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} \right) - \text{VP} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} \right).$
- 14) a) $\frac{1}{2\pi} e^{-2jt},$
b) $\frac{1}{2\pi} e^{3jt},$
c) $\frac{1}{\pi}(\cos t - 1),$
d) $\frac{1}{2j}[\delta(t + 1) - \delta(t - 1)],$
e) $\frac{1}{2}[\delta(t - 2) + \delta(t + 2)],$
f) $-\frac{1}{4}[\delta(t - 6) - 2\delta(t) + \delta(t + 6)],$
g) $\frac{1}{8}[\delta(t - 12) + 3\delta(t - 4) + 3\delta(t + 4) + \delta(t + 12)],$
h) $-\delta''(t),$
i) $-e^{jt} \delta''(t),$
j) $\frac{1}{4} \delta \left(t + \frac{1}{2} \right),$
k) $\frac{1}{2}[\delta'''(t + 1) - \delta'''(t - 1)],$
l) $-\frac{j}{2}[e^{-j4} \delta'(t + 1) + e^{j4} \delta'(t - 1)].$
- 15) b) $F_0(\omega) = a \text{sinc} \left(\frac{a}{2} \omega \right).$
- 16) b) $F_0(\omega) = \begin{cases} \frac{-4A}{\omega^2 - 4} \cos \left(\frac{\pi\omega}{4} \right) & \text{si } |\omega| \neq 2, \\ A \frac{\pi}{4} & \text{si } |\omega| = 2. \end{cases}$
- 17) b) $F_0(\omega) = \begin{cases} \frac{j}{\omega^2} \left(\omega \cos \frac{\omega}{2} - 2 \sin \frac{\omega}{2} \right) & \text{si } \omega \neq 0, \\ 0 & \text{si } \omega = 0. \end{cases}$
- 18) a) $H(\omega) = 1 + \frac{1}{(1+j\omega)^2},$
b) $y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}.$
- 19) a) $h(t) = \frac{1}{4} (e^{-|t+1|} + e^{-|t-1|}),$
b) $y(t) = \frac{1}{4} (e^{-|t|} + e^{-|t-2|}).$
- 20) a) $H(\omega) = e^{-j\frac{\pi}{2}\omega},$
b) $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = j\pi[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)],$
c) $y(t) = \sin t,$
d) $y(t) = (h \star x)(t) = \sin t.$

21) a) $H(\omega) = -\frac{1}{\omega^2+1},$

b) $h(t) = -\frac{1}{2} e^{-|t|},$

c) $h''(t) - h(t) = \delta(t).$

22) a) $H(\omega) = \frac{2j\omega+1}{-12\omega^2+7j\omega+1};$

b) $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = H(\omega) \frac{1}{1+j\omega},$

$$|Y(\omega)| = \frac{\sqrt{1+4\omega^2}}{\sqrt{(1-12\omega^2)^2+49\omega^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}},$$

$$\arg Y(\omega) = \arg(1+2j\omega) - \arg(1-12\omega^2+7j\omega) - \arg(1+j\omega);$$

c) $y(t) = \left[\frac{2}{3} e^{-\frac{t}{4}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{6} e^{-t} \right] \text{ech}(t).$

23) a) $h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \text{ech}(t),$

b) $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ech}(t).$

24) $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$

Chapitre 3

Analyse fréquentielle des systèmes

3.1 Systèmes dynamiques

Prenons l'exemple d'un circuit $R - L$ (voir figure 3.1) composé d'une résistance R , d'une inductance L et d'un générateur de tension qui envoie dans le circuit une tension $V(t)$ variable, ce qui engendre l'apparition d'un courant $i(t)$.

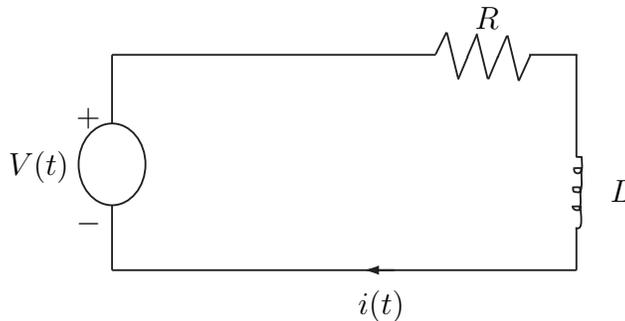


FIGURE 3.1 – Circuit $R - L$ soumis à une tension variable dans le temps $V(t)$.

On montre que $i(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} V(t) \quad (3.1)$$

et est donné par

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{R}{L}(t-v)} V(v) dv. \quad (3.2)$$

On peut représenter schématiquement ce circuit par le diagramme de la figure 3.2 qui traduit le fait que le circuit agit comme un mécanisme qui à une entrée $V(t)$ associe une sortie $i(t)$.

Un système S est une application qui à un signal analogique d'entrée $x(t)$ associe un signal de sortie $y(t)$ noté

$$y(t) = S(x(t)). \quad (3.3)$$

On représente un système S par le diagramme de la figure 3.3.

On dit que $y(t)$ est la réponse du système S à l'entrée $x(t)$, ce que l'on note

$$x(t) \mapsto y(t) \quad \text{ou simplement} \quad x \mapsto y. \quad (3.4)$$



FIGURE 3.2 – Représentation du système de la figure 3.1 sous forme de diagramme entrée-sortie.

FIGURE 3.3 – Représentation d'un système S ayant pour signal analogique d'entrée $x(t)$ et pour sortie analogique $y(t)$.

Un système est *continu* (ou analogique) si les signaux d'entrée et de sortie sont continus. On dit aussi qu'il s'agit d'un système en *temps-continu* (en anglais *continuous-time system*). Le circuit de l'exemple (3.1) est continu.

Un système est *discret* (ou numérique) si les signaux d'entrée et de sortie sont discrets. On dit aussi qu'il s'agit d'un système en *temps-discret* (*discrete-time system*). Ils seront évoqués ultérieurement.

3.1.1 Systèmes linéaires

Parmi les systèmes rencontrés dans les problèmes scientifiques, les systèmes linéaires constituent une application majeure dans de nombreux domaines.

Un système S est *linéaire* si

$$S(\lambda x) = \lambda S(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.5)$$

et

$$S(x_1 + x_2) = S(x_1) + S(x_2). \quad (3.6)$$

La relation (3.5) traduit *le principe de proportionnalité* : si y est la réponse à l'entrée x , alors la réponse à λx est λy , c'est-à-dire

$$x \mapsto y \Rightarrow \lambda x \mapsto \lambda y. \quad (3.7)$$

La relation (3.6) traduit *le principe d'additivité* : si y_1 est la réponse à l'entrée x_1 et y_2 la réponse à l'entrée x_2 , alors la réponse à l'entrée $x_1 + x_2$ est $y_1 + y_2$, soit

$$x_1 \mapsto y_1 \text{ et } x_2 \mapsto y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \mapsto y_1 + y_2. \quad (3.8)$$

Les systèmes linéaires possèdent la propriété suivante.

Proposition 3.1. *La réponse d'un système linéaire au signal nul est le signal nul.*

Démonstration. De fait, si x désigne un signal de réponse y , on a

$$S(0) = S(x - x) = S(x) - S(x) = y - y = 0.$$

□

Vérifions que le système S du système introductif (3.1) est linéaire. D'une part, il est proportionnel :

$$V \mapsto i \Rightarrow \lambda V \mapsto \lambda i,$$

puisque

$$\frac{d}{dt}(\lambda i(t)) + \frac{R}{L}(\lambda i(t)) = \lambda \left[\frac{d}{dt} i(t) + \frac{R}{L} i(t) \right] = \frac{1}{L}(\lambda V(t)).$$

D'autre part, il est additif :

$$V_1 \mapsto i_1 \text{ et } V_2 \mapsto i_2 \Rightarrow V_1 + V_2 \mapsto i_1 + i_2,$$

puisque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(i_1(t) + i_2(t)) + \frac{R}{L}(i_1(t) + i_2(t)) &= \frac{d}{dt} i_1(t) + \frac{R}{L} i_1(t) + \frac{d}{dt} i_2(t) + \frac{R}{L} i_2(t) \\ &= \frac{1}{L} (V_1(t) + V_2(t)). \end{aligned}$$

Plus généralement, tout système continu décrit par une *équation différentielle linéaire à coefficients constants* du type

$$b_N \frac{d^N y}{dt^N} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_M \frac{d^M x}{dt^M} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x \quad (3.9)$$

où les coefficients a_i, b_j sont des constantes complexes est linéaire. De tels systèmes se rencontrent couramment en pratique.

En introduisant les polynômes

$$\begin{aligned} A(z) &= a_M z^M + \dots + a_1 z + a_0 \\ B(z) &= b_N z^N + \dots + b_1 z + b_0, \end{aligned}$$

l'équation (3.9) peut se mettre sous la forme compacte

$$B \left(\frac{d}{dt} \right) y = A \left(\frac{d}{dt} \right) x. \quad (3.10)$$

3.1.2 Systèmes invariants

Un système est *invariant* si la forme du signal de sortie ne dépend pas de l'instant auquel est appliqué le signal d'entrée, autrement dit si le comportement de ce système (i.e. la loi qu'il établit entre entrées et sorties) ne change pas au cours du temps. Dans un système invariant, la réponse à un signal d'entrée sera la même aujourd'hui ou demain.

Traduisons mathématiquement l'invariance d'un système. Un système *continu* est *invariant* si

$$x(t) \mapsto y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \mapsto y(t - t_0), \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Exemple 3.2. Le système décrit par l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est invariant. De fait, en exprimant que les deux membres sont égaux au temps $t - t_0$, il vient

$$\frac{dy(t - t_0)}{dt} + 2y(t - t_0) = 3x(t - t_0).$$

Si nous posons

$$\tilde{x}(t) = x(t - t_0), \quad \tilde{y}(t) = y(t - t_0)$$

et si nous observons que

$$\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{y}(t - t_0)}{dt},$$

on obtient

$$\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} + 2\tilde{y}(t) = 3\tilde{x}(t)$$

de sorte que

$$x(t - t_0) \mapsto y(t - t_0).$$

Plus généralement, on peut démontrer de cette manière la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Tout système continu décrit par une équation différentielle à coefficients constants du type (3.9) est invariant.*

Si les coefficients sont variables, l'invariance n'est plus de mise, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.4. *Le système décrit par l'équation différentielle*

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = tx(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

n'est pas invariant. De fait, en procédant comme dans l'exemple précédent, on obtient successivement

$$\frac{dy(t - t_0)}{dt} + 2y(t - t_0) = (t - t_0)x(t - t_0)$$

ou encore

$$\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} + 2\tilde{y}(t) = (t - t_0)\tilde{x}(t)$$

de sorte que les signaux $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ ne vérifient pas l'équation (3.12).

3.1.3 Fonction de transfert

La notion de fonction de transfert d'un système linéaire invariant découle de la proposition suivante.

Proposition 3.5 (Caractéristique des systèmes linéaires invariants). *Dans un système linéaire invariant, la réponse à un signal harmonique de fréquence ω est un signal harmonique de même fréquence.*

Démonstration. On suppose implicitement que la réponse existe : soit $y(t)$ la réponse du système continu S au signal harmonique

$$x(t) = ce^{j\omega t}.$$

Si τ désigne un nombre réel quelconque, on a d'après (3.11)

$$x(t - \tau) \mapsto y(t - \tau).$$

Comme

$$x(t - \tau) = ce^{j\omega(t-\tau)} = ce^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} = e^{-j\omega\tau} x(t),$$

on obtient d'après (3.5)

$$y(t - \tau) = S(x(t - \tau)) = S(e^{-j\omega\tau} x(t)) = e^{-j\omega\tau} y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $t = 0$, on a

$$y(-\tau) = e^{-j\omega\tau} y(0), \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

d'où en remplaçant τ par $-t$,

$$y(t) = y(0)e^{j\omega t}.$$

□

La réponse du système linéaire invariant S au signal d'entrée $x(t) = e^{j\omega t}$ est donc donnée par

$$y(t) = Ce^{j\omega t}$$

où C est une constante complexe par rapport au temps t , mais qui dépend néanmoins de la fréquence ω (ou plus exactement de la pulsation). On la note

$$C = H(\omega)$$

et on l'appelle *fonction de transfert* du système. On a donc

$$e^{j\omega t} \mapsto H(\omega)e^{j\omega t} \tag{3.13}$$

ou encore

$$H(\omega) = \frac{S(e^{j\omega t})}{e^{j\omega t}}. \tag{3.14}$$

Proposition 3.6. *La fonction de transfert du système décrit par l'équation différentielle*

$$B \left(\frac{d}{dt} \right) y(t) = A \left(\frac{d}{dt} \right) x(t)$$

est donnée par

$$H(\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}. \tag{3.15}$$

Démonstration. En exprimant que les signaux

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$$

vérifient l'équation (3.9) et après avoir observé que

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{j\omega t} = (j\omega)^k e^{j\omega t}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

on obtient

$$[b_N(j\omega)^N + \dots + b_1(j\omega) + b_0] H(\omega) = [a_M(j\omega)^M + \dots + a_1(j\omega) + a_0],$$

d'où

$$H(\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}.$$

□

Exemple 3.7. La fonction de transfert du système introductif (3.1) est donnée par

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{L}}{j\omega + \frac{R}{L}} = \frac{1}{j\omega L + R}. \quad (3.16)$$

La proposition 3.5 est une caractéristique essentielle des systèmes linéaires invariants. Cependant, l'existence de la réponse d'un tel système à un signal harmonique n'est pas assurée. Comme nous allons le voir dans la suite de ce cours, elle dépend de la stabilité du système et de ses fréquences propres. Dorénavant, nous supposons que tous les systèmes rencontrés sont linéaires et invariants. Les systèmes linéaires invariants sont également appelés systèmes *linéaires temps-invariants* (en anglais *linear time-invariant*) et désignés en abrégé par *systèmes LTI*.

3.1.4 Systèmes réels

Un système est *réel* si la réponse à un signal réel est également un signal réel.

Proposition 3.8. Si $y(t)$ est la réponse du système réel S au signal $x(t)$, alors $\mathcal{R}y(t)$ est la réponse à $\mathcal{R}x(t)$ et $\mathcal{I}y(t)$ est la réponse à $\mathcal{I}x(t)$.

Démonstration. Posons

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t) \quad \text{et} \quad y(t) = y_1(t) + jy_2(t).$$

En tenant compte de la linéarité du système S , il vient

$$y(t) = S(x(t)) = S(x_1(t) + jx_2(t)) = S(x_1(t)) + jS(x_2(t)).$$

Comme les signaux $S(x_1(t))$ et $S(x_2(t))$ sont réels, on a

$$S(x_1(t)) = y_1(t) \quad \text{et} \quad S(x_2(t)) = y_2(t),$$

ce qui traduit

$$\mathcal{R}x(t) \mapsto \mathcal{R}y(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}x(t) \mapsto \mathcal{I}y(t).$$

□

Il est possible de préciser la réponse d'un système réel de fonction de transfert $H(\omega)$ à un signal cisoïdal.

Proposition 3.9. *Si S est un système réel de fonction de transfert*

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)},$$

sa réponse au signal cisoïdal

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_o)$$

est le signal cisoïdal de même fréquence

$$y(t) = A |H(\omega)| \cos(\omega t + \phi_o + \phi(\omega)).$$

Démonstration. On a successivement

$$\begin{aligned} y(t) &= S(x(t)) = S[\mathcal{R}(A e^{j\phi_o} e^{j\omega t})] = \mathcal{R}[S(A e^{j\phi_o} e^{j\omega t})] \\ &= \mathcal{R}[A e^{j\phi_o} S(e^{j\omega t})] = \mathcal{R}[A e^{j\phi_o} H(\omega) e^{j\omega t}] \\ &= \mathcal{R}[A |H(\omega)| e^{j(\omega t + \phi_o + \phi(\omega))}] \\ &= A |H(\omega)| \cos(\omega t + \phi_o + \phi(\omega)). \end{aligned}$$

□

3.1.5 Systèmes stables

Un signal continu $f(t)$ est *borné* s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(t)| \leq C, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Un système est *stable* si la réponse à tout signal borné est également un signal borné.

Un signal harmonique est un signal borné, puisque

$$|c e^{j\omega t}| = |c| |e^{j\omega t}| = |c|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La réponse d'un système stable à ce signal existe et est bornée également, c'est un résultat attendu puisque la réponse est également harmonique en vertu de la proposition 3.5.

3.1.6 Systèmes causaux

Un système est *causal* si quel que soit le réel t_0 , on a $x(t) \mapsto y(t)$ et

$$x(t) = 0, \forall t < t_0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0, \forall t < t_0.$$

Donnons une interprétation intuitive de cette définition. Un signal $x(t)$ est dit *excité* si $x(t) \neq 0$; il est *non excité* sinon. La condition précédente exprime que la réponse $y(t)$ n'est pas excitée tant que $x(t)$ ne l'est pas; il faut donc une cause d'excitation de $x(t)$ pour que $y(t)$ le soit également.

Proposition 3.10 (Caractérisation des systèmes causaux). *Un système est causal si et seulement si la réponse à tout signal causal est également un signal causal.*

Démonstration. La condition est visiblement nécessaire : il suffit de prendre $t_0 = 0$ dans la définition. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x(t)$ un signal tel que

$$x(t) \mapsto y(t) \quad \text{et} \quad x(t) = 0, \forall t < t_0.$$

Le signal $\tilde{x}(t) = x(t + t_0)$ est tel que

$$\tilde{x}(t) \mapsto y(t + t_0) \quad \text{et} \quad \tilde{x}(t) = 0, \forall t < 0.$$

Étant causal, sa réponse l'est également :

$$y(t + t_0) = 0, \forall t < 0$$

de sorte que

$$y(t) = 0, \forall t < t_0.$$

□

3.2 Produit de convolution

Un outil mathématique est très utile dans l'analyse des systèmes : il s'agit du *produit de convolution* (ou convolution en abrégé).

Le *produit de convolution* de deux signaux f et g définis presque partout dans \mathbb{R} est la fonction notée $f \star g$ et définie par

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(t-v) dv \quad (3.17)$$

pourvu que cette intégrale existe.

Si f et g sont nuls pour $t < 0$, on a

$$f(v)g(t-v) = 0 \quad \text{si} \quad v < 0 \quad \text{ou si} \quad v > t$$

de sorte que

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(v)g(t-v) dv & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Examinons quelques propriétés du produit de convolution.

3.2.1 Propriétés

Bilinéarité

Le produit de convolution est bilinéaire : on a

$$f \star (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 (f \star g_1) + \alpha_2 (f \star g_2) \quad (3.19)$$

et

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \star g = \alpha_1 (f_1 \star g) + \alpha_2 (f_2 \star g). \quad (3.20)$$

Ces relations découlent directement de la propriété d'additivité des intégrales.

Commutativité

Le produit de convolution est commutatif :

$$f \star g = g \star f. \quad (3.21)$$

De fait, on a

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(t-v)dv$$

ou encore, à l'aide du changement de variable $v = t - w$ de sorte que $dv = -dw$,

$$\begin{aligned} (f \star g)(t) &= - \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-w)g(w)dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(w)f(t-w)dw \\ &= (g \star f)(t). \end{aligned}$$

Règle de dérivation

La dérivée du produit de convolution n'est pas donnée par la formule classique de dérivée d'un produit, mais par

$$\frac{d}{dt}(f \star g) = \frac{df}{dt} \star g \quad (3.22)$$

ou

$$\frac{d}{dt}(f \star g) = f \star \frac{dg}{dt} \quad (3.23)$$

selon que f ou g est dérivable.

Par exemple, si g est dérivable, on a

$$\begin{aligned} (f \star g)'(t) &= \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(t-v)dv \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \frac{dg(t-v)}{dt} dv \\ &= \left(f \star \frac{dg}{dt} \right) (t), \end{aligned}$$

la dérivation sous le signe d'intégration étant permise sous certaines conditions que nous supposons remplies.

3.2.2 Convolution par des signaux usuels**Convolution par l'échelon-unité**

On a

$$(f \star \text{ech})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\text{ech}(t-v)dv.$$

Comme

$$\text{ech}(t - v) = \begin{cases} 0 & \text{si } t - v < 0, \text{ c-à-d si } v > t, \\ 1 & \text{si } t - v > 0, \text{ c-à-d si } v < t; \end{cases}$$

il vient

$$(f \star \text{ech})(t) = \int_{-\infty}^t f(v) dv. \quad (3.24)$$

Notons que si $f \in C_0(\mathbb{R})$ et si f est intégrable en $-\infty$, $f \star \text{ech}$ représente la primitive de f qui tend vers 0 en $-\infty$.

Convolution par un signal rectangulaire

On a

$$\begin{aligned} (f \star \text{rect}_T)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \text{rect}_T(t - v) dv \\ &= \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} f(v) dv. \end{aligned}$$

La convolution de f par un signal rectangulaire de largeur T représente donc la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2}]$ dans le cas où $f \in C_0(\mathbb{R})$.

Convolution par l'impulsion de Dirac

D'après la formule (2.138), il vient

$$(f \star \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - v) f(t - v) dv = f(t), \quad (3.25)$$

car f est continue. L'impulsion de Dirac est donc un élément neutre pour le produit de convolution.

D'autre part, on a d'après la formule (2.146)

$$(f \star \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t - v) dv = f(t - t_0). \quad (3.26)$$

3.2.3 Convolution et transformée de Fourier

Il existe une relation très pratique entre l'opération de convolution et la transformée de Fourier qui nous dispense, la plupart du temps, de calculer explicitement une convolution. La convolution dans le domaine temporel devient une simple multiplication dans le domaine fréquentiel.

Proposition 3.11 (Spectre de convolution). *Si f et g sont deux fonctions intégrables dans \mathbb{R} de spectres respectifs $F(\omega)$ et $G(\omega)$, alors*

$$(f \star g)(t) \leftrightarrow F(\omega) G(\omega). \quad (3.27)$$

Démonstration. Au vu des hypothèses, nous savons que la fonction $f \star g \in L_1(\mathbb{R})$. Son spectre vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\omega(f \star g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f \star g)(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(t-v) dv \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)e^{-j\omega v} g(t-v)e^{-j\omega(t-v)} dv \right) dt.\end{aligned}$$

L'intégrabilité de la fonction étant assurée par le critère de Tonelli, on peut permuter l'ordre d'intégration, ce qui conduit à

$$\mathcal{F}_\omega(f \star g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)e^{-j\omega v} dv \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-v)e^{-j\omega(t-v)} dt \quad (3.28)$$

ou encore en posant $t-v = \tau$ dans l'intégrale en t , l'intégrande devient alors à variables séparables avec des bornes indépendantes et on peut considérer qu'il s'agit d'un produit d'intégrales

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\omega(f \star g) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)e^{-j\omega v} dv \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \right) \\ &= F(\omega)G(\omega),\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 3.12 (Spectre d'un produit). *Soient f, g deux fonctions continûment dérivables par morceaux et intégrables dans \mathbb{R} de spectres respectifs $F(\omega)$ et $G(\omega)$. Si $fg \in L_1(\mathbb{R})$, alors*

$$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}(F \star G)(\omega). \quad (3.29)$$

Démonstration. En appliquant le principe de dualité au spectre de $(f \star g)$ (cfr proposition 3.11), on obtient

$$F(t)G(t) \leftrightarrow 2\pi(f \star g)(-\omega) \quad (3.30)$$

avec $f = \mathcal{F}^{-1}F$ et $g = \mathcal{F}^{-1}G$.

En changeant les notations, prenant f (resp. g) pour F (resp. G), on obtient

$$f(t)g(t) \leftrightarrow 2\pi(\mathcal{F}^{-1}f \star \mathcal{F}^{-1}g)(-\omega). \quad (3.31)$$

D'après (2.22) et la proposition 2.8, le spectre de $f(t)g(t)$ s'écrit successivement

$$\begin{aligned}2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{-t}f \star \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{-t}g \right) (-\omega) &= \frac{1}{2\pi} [F(-v) \star G(-v)](-\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-v)G(\omega+v) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(\omega-u) du \\ &= \frac{1}{2\pi}(F \star G)(\omega).\end{aligned}$$

□

3.3 Réponses d'un système

Soit S un système LTI. On définit la *réponse impulsionnelle* du système S comme étant la réponse de ce système à l'impulsion de Dirac : il s'agit du signal $h(t)$ défini par

$$h(t) = S(\delta(t)) \quad (3.32)$$

ou encore

$$\delta(t) \mapsto h(t). \quad (3.33)$$

La *réponse indicielle* du système S est la réponse de ce système à l'échelon-unité : il s'agit du signal $\text{ind}(t)$ défini par

$$\text{ind}(t) = S(\text{ech}(t)) \quad (3.34)$$

ou encore

$$\text{ech}(t) \mapsto \text{ind}(t). \quad (3.35)$$

La réponse impulsionnelle du système de l'exemple introductif (3.2), est donnée par

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e^{-(t-v)\frac{R}{L}} \delta(v) dv \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-v)\frac{R}{L}} \text{ech}(t-v) \delta(v) dv \\ &= \frac{1}{L} e^{-t\frac{R}{L}} \text{ech}(t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sa réponse indicielle vaut

$$\begin{aligned} \text{ind}(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e^{-(t-v)\frac{R}{L}} \text{ech}(v) dv \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{1}{L} \int_0^t e^{-(t-v)\frac{R}{L}} dv = \frac{1}{R}(1 - e^{-t\frac{R}{L}}) & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= \frac{1}{R}(1 - e^{-t\frac{R}{L}}) \text{ech}(t). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Proposition 3.13. *Si S est un système linéaire invariant continu de réponse impulsionnelle $h(t)$, la réponse de ce système au signal $x(t)$ est donnée par*

$$S(x(t)) = (x \star h)(t). \quad (3.38)$$

Démonstration. En vertu de (3.25), on a successivement

$$S(x(t)) = S[(x \star \delta)(t)] = S\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(v) \delta(t-v) dv\right).$$

Si on découpe $] -\infty, +\infty[$ en intervalles élémentaires $I = [v, v + dv]$, l'intégrale se présente comme la limite d'une somme, de sorte que $x(v)$ est considérée constante dans cet intervalle

$$\begin{aligned} S(x(t)) &= S\left(\lim_{dv \rightarrow 0} \sum_I x(v) \delta(t-v) dv\right) \\ &= \lim_{dv \rightarrow 0} S\left(\sum_I x(v) \delta(t-v) dv\right) \\ &= \lim_{dv \rightarrow 0} \sum_I x(v) S(\delta(t-v)) dv \end{aligned}$$

en vertu de la linéarité de S . Comme

$$S(\delta(t-v)) = h(t-v)$$

étant donné que S est invariant, il vient

$$\begin{aligned} S(x(t)) &= \lim_{dv \rightarrow 0} \sum_I x(v) h(t-v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) h(t-v) dv \\ &= (x \star h)(t). \end{aligned}$$

□

La proposition 3.13 est vérifiée pour le système de l'exemple (3.2) puisque, en utilisant (3.36)

$$\begin{aligned} S(x(t)) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e^{-(t-v)\frac{R}{L}} x(v) dv \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-v)\frac{R}{L}} \text{ech}(t-v) x(v) dv \\ &= (x \star h)(t). \end{aligned}$$

Il y a une relation étroite entre la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle d'un système.

Proposition 3.14. *Dans tout système linéaire invariant continu, la réponse impulsionnelle est la dérivée (au sens des distributions) de la réponse indicielle.*

Démonstration. Comme

$$\text{ind}(t) = S(\text{ech}(t)) = (\text{ech} \star h)(t),$$

la dérivée $a'(t)$ vaut

$$\frac{d}{dt} \text{ind}(t) = \left(\frac{d\text{ech}}{dt} \star h \right) (t) = (\delta \star h)(t) = h(t).$$

□

L'intérêt de la réponse indicielle réside dans le fait qu'elle peut être déterminée expérimentalement, contrairement à la réponse impulsionnelle. Cette dernière s'obtient en dérivant la réponse indicielle.

On vérifie aisément que la proposition 3.14 est satisfaite pour l'exemple (3.2) en comparant (3.37) et (3.36).

La réponse impulsionnelle d'un système permet d'en dégager les principales caractéristiques comme en témoignent les propositions suivantes.

Proposition 3.15 (Caractérisation d'un système réel). *Un système LTI est réel si et seulement si sa réponse impulsionnelle est réelle.*

Démonstration. Comme

$$(x \star h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v)h(t-v)dv,$$

il est évident que $x \star h$ est réel si x et h le sont.

D'autre part, si $x \star h$ est réel quel que soit le signal réel x , alors

$$\mathcal{I}[(x \star h)(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) \mathcal{I}[h(t-v)] dv = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En prenant $x(t)$ quelconque, il en résulte forcément que

$$\mathcal{I}[h(t-v)] = 0, \quad \forall t, v \in \mathbb{R};$$

d'où h est réel. □

Proposition 3.16 (Caractérisation d'un système causal). *Un système LTI est causal si et seulement si sa réponse impulsionnelle est causale, soit*

$$h(t) = 0, \quad \forall t < 0.$$

Démonstration. D'une part, si x et h sont des signaux causaux, alors $h(t-v)$ est nul pour tout $t < v$. Dès lors, si $t < 0$, on a que $h(t-v) = 0$ pour tout $v > 0$ et

$$(x \star h)(t) = \int_0^{+\infty} x(v)h(t-v)dv = 0, \quad \forall t < 0.$$

D'autre part, si

$$(x \star h)(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

lorsque $x(t) = 0, \forall t < 0$, on a

$$(x \star h)(t) = \int_0^{+\infty} x(v) h(t-v) dv = 0, \quad \forall t < 0;$$

d'où en prenant $x(t)$ quelconque, il en résulte forcément que

$$h(t-v) = 0, \quad \forall t < 0, \forall v \geq 0;$$

ce qui signifie que

$$h(t) = 0, \quad \forall t < 0.$$

□

Proposition 3.17 (Caractérisation d'un système stable). *Un système LTI est stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle $h(t) \in L_1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. D'une part, si $x(t)$ est borné, c'est-à-dire si

$$|x(t)| \leq C, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et si $h \in L_1(\mathbb{R})$, alors $(x \star h)(t)$ est également borné puisque

$$\begin{aligned} |(x \star h)(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(v)| |h(t-v)| dv \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-v)| dv \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)| du. \end{aligned}$$

D'autre part, montrons que $h \in L_1(\mathbb{R})$ si le système est stable. Procédons par l'absurde : supposons $h \notin L_1(\mathbb{R})$ et considérons le signal d'entrée

$$x(t) = \begin{cases} \frac{h(-t)}{|h(-t)|} & \text{si } h(-t) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce signal est borné puisque $|x(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$, et est tel que

$$x(t) h(-t) = |h(-t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le signal de sortie correspondant est donné par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) h(t-v) dv ;$$

d'où en particulier en $t = 0$,

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) h(-v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(-v)| dv = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(v)| dv ;$$

ce qui prouve que le signal de sortie n'est pas borné et que par conséquent le système n'est pas stable. \square

3.4 Systèmes LTI d'entrée périodique

Soit S un système linéaire invariant de fonction de transfert $H(\omega)$:

$$S(e^{j\omega t}) = H(\omega)e^{j\omega t}. \quad (3.39)$$

Nous allons déterminer la réponse de ce système à un signal d'entrée périodique. S'il est généralement difficile d'obtenir cette réponse dans le domaine temporel, nous allons voir qu'on peut la déterminer aisément dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire à partir de son spectre.

Proposition 3.18 (Réponse d'un système à une entrée périodique). Si $x(t)$ désigne un signal périodique de période T continûment dérivable par morceaux dans \mathbb{R} de spectre

$$x(t) \leftrightarrow \alpha_k \quad (3.40)$$

alors la réponse $y(t)$ du système S à ce signal est un signal périodique de période T de spectre

$$y(t) \leftrightarrow \alpha_k H(k\omega_0), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.41)$$

Démonstration. D'après le théorème de Dirichlet (proposition 1.15), on a

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (3.42)$$

avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

La réponse $y(t)$ est donnée par

$$y(t) = S(x(t)) = S\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}\right) \quad (3.43)$$

et en utilisant la linéarité de S

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k S(e^{jk\omega_0 t}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}. \quad (3.44)$$

Il s'agit d'une fonction périodique de période T de spectre

$$y(t) \leftrightarrow \alpha_k H(k\omega_0), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.45)$$

□

Si $H(k\omega_0) = 0$, on dit que la fréquence $k\omega_0$ est *bloquée* : le système ne donne aucune réponse pour une fréquence donnée. Les filtres sont des dispositifs permettant de sélectionner (ou de *filtrer*) certaines fréquences en bloquant toutes les autres. On distingue : des filtres *passse-bas* bloquant toutes les fréquences supérieures à une certaine valeur, des filtres *passse-haut* bloquant toutes les fréquences inférieures à une certaine valeur, des filtres *bande* ne laissant passer que les fréquences comprises entre deux valeurs.

Exemple 3.19. *Considérons un système linéaire invariant dont la fonction de transfert est*

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2}. \quad (3.46)$$

La réponse de ce système au signal $\text{sci}_{2\pi}(t)$ périodique en dents de scie (1.75) de période 2π , *c-à-d* $\omega_0 = 1$, dont le spectre est

$$x(t) \leftrightarrow \alpha_k = \begin{cases} -\frac{j}{2} b_k = \frac{(-1)^k}{k\pi} j & \text{si } k \in \mathbb{Z}_0, \\ 0 & \text{si } k = 0, \end{cases} \quad (3.47)$$

est le signal $y(t)$ périodique de période 2π et de spectre

$$y(t) \leftrightarrow \beta_k = \alpha_k H(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^k j}{k\pi(-k^2 + 3jk + 2)} & \text{si } k \in \mathbb{Z}_0, \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Le signal $x(t)$ est réel et impair. Par contre, si le signal $y(t)$ est encore réel car $\beta_{-k} = \overline{\beta_k}$, il n'est plus impair puisque $\beta_{-k} \neq -\beta_k$.

3.5 Systèmes LTI d'entrée analogique non périodique

3.5.1 Fonction de transfert

Les systèmes reposent sur la fonction de transfert. Le résultat suivant permet de la calculer facilement.

Proposition 3.20. *La fonction de transfert d'un système LTI est la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle h .*

Démonstration. La réponse du système au signal $x(t) = e^{j\omega t}$ est donnée en vertu de la proposition 3.13 par

$$\begin{aligned}(h \star x)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t}.\end{aligned}$$

D'autre part, on sait, d'après la formule (3.13), que

$$e^{j\omega t} \mapsto H(\omega) e^{j\omega t} \quad (3.49)$$

où $H(\omega)$ désigne la fonction de transfert du système.

En égalant les expressions du signal de sortie engendré par $x(t)$, on obtient

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathcal{F}_\omega[h(t)]. \quad (3.50)$$

□

Proposition 3.21. *Si $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ désignent les transformées de Fourier du signal d'entrée $x(t)$ et du signal de sortie correspondant $y(t)$, alors*

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \quad (3.51)$$

où $H(\omega)$ désigne la fonction de transfert du système.

Démonstration. Comme

$$y(t) = (h \star x)(t), \quad (3.52)$$

il vient

$$\mathcal{F}_\omega[y(t)] = \mathcal{F}_\omega[h(t)] \mathcal{F}_\omega[x(t)]; \quad (3.53)$$

soit

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega). \quad (3.54)$$

□

La fonction de transfert d'un système permet de décrire le système dans le domaine fréquentiel; on l'appelle aussi *réponse fréquentielle* du système. En pratique, partant du signal d'entrée $x(t)$, on détermine $X(\omega) = \mathcal{F}_\omega[x(t)]$; on en déduit $Y(\omega)$ à l'aide de la proposition 3.21 et par suite $y(t) = \mathcal{F}_t^{-1}[Y(\omega)]$.

Exemple 3.22. Un filtre passe-bas de fréquence de coupure $\omega_c > 0$ est un système linéaire dont la fonction de transfert est donnée par

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & \text{si } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c. \end{cases} \quad (3.55)$$

Seules les fréquences inférieures ou égales en valeur absolue à la fréquence ω_c peuvent passer. La réponse impulsionnelle de ce filtre est donnée par

$$h(t) = \mathcal{F}_t^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega, \quad (3.56)$$

soit

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c(t - t_0)). \quad (3.57)$$

La réponse de ce filtre au signal d'entrée

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.58)$$

périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est donnée par

$$y(t) = S(x(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k S(e^{jk\omega_0 t}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}. \quad (3.59)$$

Si ω_c n'est pas un multiple entier de ω_0 , désignons par N l'unique entier tel que

$$N\omega_0 < \omega_c < (N+1)\omega_0. \quad (3.60)$$

Il s'ensuit que

$$H(k\omega_0) = 0 \quad \text{si } |k| \geq N+1, \quad (3.61)$$

d'où

$$y(t) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{jk\omega_0(t-t_0)}. \quad (3.62)$$

Le spectre discret de $y(t)$ ne comporte donc qu'un nombre fini de valeurs significatives α_k correspondant aux fréquences $k\omega_0$ comprises entre $-\omega_c$ et ω_c .

3.5.2 Systèmes décrits par une équation différentielle

Considérons le système LTI décrit par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$B \left(\frac{d}{dt} \right) y(t) = A \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) \quad (3.63)$$

où

$$\begin{aligned} A(z) &= a_M z^M + \dots + a_1 z + a_0, \\ B(z) &= b_N z^N + \dots + b_1 z + b_0 \end{aligned}$$

sont des polynômes de degrés respectifs M et N .

Sa fonction de transfert est donnée par

$$H(\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}. \quad (3.64)$$

Proposition 3.23. *Le système décrit par l'équation différentielle du type (3.63) avec $M \leq N$ est causal et stable si et seulement si les zéros du polynôme $B(z)$ sont situés dans le demi-plan $\{z : \Re z < 0\}$.*

Démonstration. Déterminons la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \mathcal{F}_t^{-1}[H(\omega)]. \quad (3.65)$$

Décomposons d'abord la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{B(z)}$ en fractions simples. En supposant (pour des raisons de facilité) que le polynôme $B(z)$ possède N zéros simples z_1, \dots, z_N , on a

$$\frac{A(z)}{B(z)} = c_0 + \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{z - z_k}, \quad (3.66)$$

d'où

$$H(\omega) = c_0 + \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{j\omega - z_k} \quad (3.67)$$

où c_0, \dots, c_N désignent des constantes. Il s'ensuit que

$$h(t) = c_0 \delta(t) + \sum_{k=1}^N c_k \mathcal{F}_t^{-1} \left(\frac{1}{j\omega - z_k} \right). \quad (3.68)$$

Comme, d'après les formules (2.28), (2.29) et (2.169),

$$\mathcal{F}_t^{-1} \left(\frac{1}{j\omega - z_k} \right) = \begin{cases} e^{z_k t} \text{ech}(t) & \text{si } \Re z_k < 0, \\ -e^{z_k t} \text{ech}(-t) & \text{si } \Re z_k > 0, \\ \frac{1}{2} \text{sgn}(t) e^{j\omega_0 t} & \text{si } z_k = j\omega_0; \end{cases} \quad (3.69)$$

on constate que le système est causal si

$$h(t) = 0, \forall t < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Re z_k < 0, \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (3.70)$$

et stable si

$$h(t) \in L_1(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \Re z_k < 0, \quad \forall k = 1, \dots, N. \quad (3.71)$$

□

Le circuit R - L de l'exemple 3.1 est régi par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} i(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} V(t) \quad (3.72)$$

que l'on peut écrire sous la forme 3.63 de référence en posant

$$A(z) = \frac{1}{L} \quad \text{et} \quad B(z) = z + \frac{R}{L}. \quad (3.73)$$

Il n'y a qu'un seul zéro au dénominateur et il s'agit de

$$z = -\frac{R}{L}, \quad (3.74)$$

dont la partie réelle est négative : le circuit R - L est donc causal et stable. En outre, la fonction de transfert est donnée par

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{L}}{j\omega + \frac{R}{L}} = \frac{1}{j\omega L + R} \quad (3.75)$$

de sorte que la réponse impulsionnelle vaut

$$h(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \text{ech}(t). \quad (3.76)$$

3.5.3 Diagrammes de Bode

Le diagramme de Bode est un moyen de représenter la réponse en fréquence d'un système, notamment électronique. Il permet une résolution graphique simplifiée, en particulier pour l'étude des fonctions de transfert de systèmes analogiques.

Le diagramme de Bode d'un système de réponse fréquentielle $H(j\omega)$ se compose de deux tracés :

1. le gain (ou module, ou amplitude complexe) en décibels (dB). Sa valeur est calculée à partir de

$$M(\omega) = 20 \log_{10}(|H(j\omega)|), \quad (3.77)$$

2. la phase complexe¹ (ou argument) , donnée par

$$P(\omega) = \arg(H(j\omega)). \quad (3.78)$$

L'échelle des pulsations est logarithmique et est exprimée en rad s^{-1} (radian par seconde). L'échelle logarithmique permet un tracé très lisible, car construit à partir de tronçons de ligne droite.

Filtre passe-bas du 1er ordre

Soit la fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} \quad (3.79)$$

avec pulsation ω_c qui est appelée pulsation de coupure.

Pour $\omega \ll \omega_c$, $H(j\omega) \simeq 1$ donc

$$M(\omega) = 20 \log_{10}(|H(j\omega)|) \simeq 0$$

1. L'usage consacré est de l'exprimer en degrés.

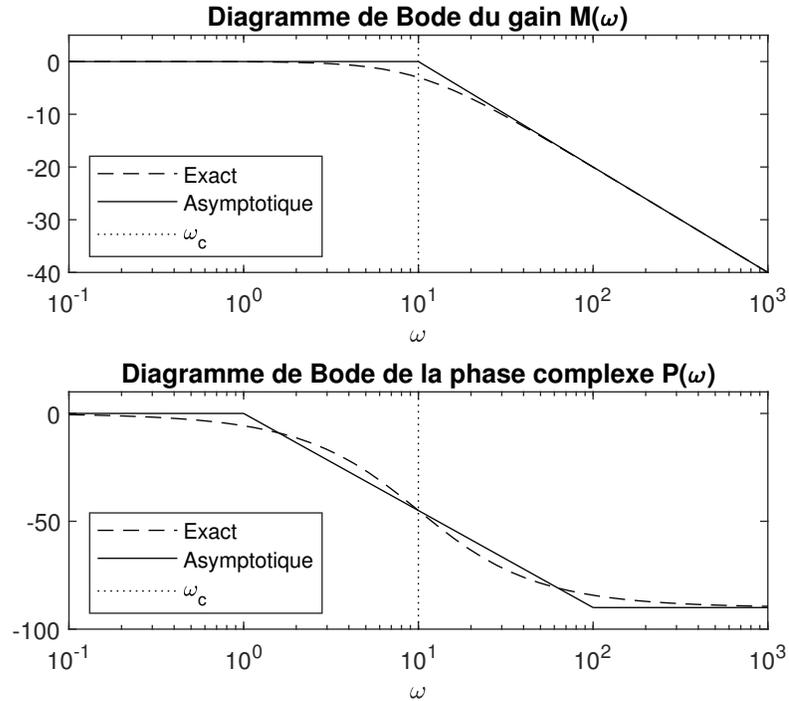


FIGURE 3.4 – Diagramme de Bode pour le filtre passe-bas du premier ordre avec $\omega_c = 10 \text{ rad s}^{-1}$.

et

$$P(\omega) = \arg(H(j\omega)) \simeq 0^\circ.$$

Pour $\omega \gg \omega_c$, $H(j\omega) \simeq -j\frac{\omega_c}{\omega}$ donc

$$M(\omega) \simeq -20 \log_{10}(\omega) + 20 \log_{10}(\omega_0)$$

et

$$P(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -90^\circ.$$

Dans un repère logarithmique, $|H(j\omega)|$ se traduit par une pente de -20 dB par décade ou encore -6 dB par octave. Le diagramme de Bode *asymptotique* du module est une représentation simplifiée qui se résume à deux tronçons linéaires (voir figure 3.4).

En ω_c , on a

$$H(j\omega_c) = \frac{1}{1+j},$$

soit

$$M(\omega_c) = -20 \log_{10}(\sqrt{2}) = -10 \log_{10}(2) \simeq -3.$$

La courbe réelle passe par conséquent 3 dB en dessous du point de coupure.

Filtre passe-haut du premier ordre

Soit la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_c}{j\omega}} = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_c}. \quad (3.80)$$

Le tracé s'obtient en prenant le symétrique du module et de la phase du passe-bas (voir figure 3.5).

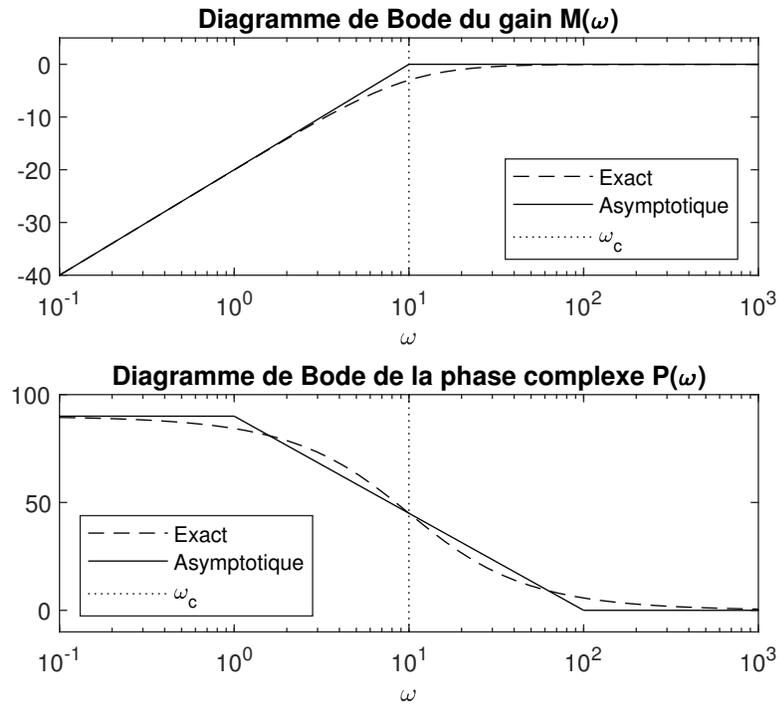


FIGURE 3.5 – Diagramme de Bode pour le filtre passe-haut du premier ordre avec $\omega_c = 10 \text{ rad s}^{-1}$.

Applications

- 1) La réponse $y(t)$ d'un système à une entrée $x(t)$ est donnée par

$$y(t) = \int_{t-1}^t x(v)dv.$$

- Montrer que ce système est linéaire et invariant ;
 - Montrer que ce système est réel et stable ;
 - Déterminer la réponse à l'entrée $x(t) = \cos \omega t$, $\omega > 0$;
 - Déterminer la réponse à l'entrée $x(t) = \sin \omega t$, $\omega > 0$;
 - Déterminer la fonction de transfert de ce système.
- 2) Soient S_1, S_2 deux systèmes continus linéaires et invariants admettant respectivement les fonctions de transfert

$$H_1(\omega) = A_1(\omega)e^{j\Phi_1(\omega)} \quad \text{et} \quad H_2(\omega) = A_2(\omega)e^{j\Phi_2(\omega)}.$$

Déterminer la fonction de transfert du système S_2S_1 qui au signal d'entrée x associe le signal

$$S_2S_1(x) = S_2[S_1(x)].$$

- 3) La fonction de transfert d'un système continu linéaire invariant est donnée par

$$H(\omega) = \frac{e^{j\omega}}{\omega^2 + 1}.$$

Calculer la réponse de ce système au signal d'entrée

$$x(t) = je^{jt}.$$

- 4) Soit un système continu linéaire invariant de réponse indicielle $a(t)$. Déterminer la réponse de ce système au signal rectangulaire $\text{rect}_2(t)$.
- 5) Soit un système continu linéaire invariant de réponse impulsionnelle $h(t)$. Déterminer la réponse de ce système au signal d'entrée

$$x(t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- 6) La réponse indicielle d'un système continu linéaire invariant est donnée par

$$a(t) = \cos(2t) e^{-3t} \text{ech}(t).$$

Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce système.

- 7) La réponse impulsionnelle d'un système LTI est donnée par

$$h(t) = \delta(t) + t e^{-t} \text{ech}(t).$$

- Déterminer la réponse fréquentielle de ce système.
- Déterminer sa réponse au signal d'entrée $x(t) = e^{j\omega t}$.

- 8) La réponse fréquentielle d'un système LTI est donnée par

$$H(\omega) = \frac{\cos \omega}{\omega^2 + 1}.$$

- a) Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce système.
 b) Déterminer sa réponse au signal d'entrée $x(t) = \delta(t - 1)$.

- 9) On considère le système linéaire invariant continu de réponse impulsionnelle

$$h(t) = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

et le signal d'entrée $x(t) = \cos t$ de réponse $y(t)$.

- a) Déterminer la fonction de transfert de ce système.
 b) Calculer à partir de là le spectre de $y(t)$.
 c) En déduire l'expression de $y(t)$.
 d) Retrouver l'expression de $y(t)$ directement à partir de $h(t)$.

- 10) On considère le système linéaire invariant continu décrit par l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t) = x(t).$$

- a) Déterminer la fonction de transfert de ce système.
 b) En déduire sa réponse impulsionnelle $h(t)$.
 c) Calculer $h''(t) - h(t)$.

- 11) Un circuit électrique est caractérisé par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante

$$12y''(t) + 7y'(t) + y(t) = 2x'(t) + x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où $y(t)$ désigne la réponse du circuit au signal d'entrée $x(t)$.

Déterminer

- a) la fonction de transfert de ce circuit,
 b) l'amplitude et la phase du spectre de $y(t)$ si $x(t) = e^{-t} \text{ech}(t)$,
 c) l'expression de $y(t)$ si $x(t) = e^{-t} \text{ech}(t)$.

- 12) Trouver la réponse impulsionnelle des systèmes LTI décrits par les systèmes d'équations différentielles

a)
$$\begin{cases} Li''(t) + Ri'(t) = x'(t) \\ Ri'(t) = y'(t), \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} Ri'(t) + \frac{1}{C} i(t) = x'(t) \\ Ri'(t) = y'(t). \end{cases}$$

- 13) Résoudre l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0,$$

sous la condition initiale

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.5.4 Diagrammes de Bode

14) Déterminer les diagrammes de Bode asymptotiques des systèmes ayant pour fonctions de transfert les fonctions suivantes :

a) $G(s) = (j\omega + a) = a(j\frac{\omega}{a} + 1)$,

b) $G(s) = \frac{1}{s+a} = \frac{1}{a(\frac{s}{a}+1)}$,

c) $G(s) = \frac{1}{s}$,

d) $G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{3}{2}K(\frac{s}{3}+1)}{s(s+1)(\frac{s}{2}+1)}$.

15) Pour chacune des fonction de transfert de l'exercice précédent, déterminer l'effet du passage du signal sinusoïdal $x(t) = 3 \cos(2 * 10^3 t + \pi)$ et dessiner le signal de sortie du système.

3.5.5 Solutions

1) c) $x(t) = \cos \omega t \mapsto y(t) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} \cos(\omega t - \frac{\omega}{2})$,

d) $x(t) = \sin \omega t \mapsto y(t) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} \sin(\omega t - \frac{\omega}{2})$,

e) $H(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega} = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} e^{-j\frac{\omega}{2}}$.

2) $H(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega) e^{j(\phi_1(\omega)+\phi_2(\omega))}$.

3) $y(t) = jH(1)e^{jt} = \frac{je^j}{2} e^{jt}$.

4) $\text{rect}_2(t) \mapsto (\text{rect}_2 \star a')(t) = \int_{t-1}^{t+1} a'(v)dv$.

5) $x(t) \mapsto (x \star h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)dv$.

6) $h(t) = a'(t) = (-3 \cos 2t - 2 \sin 2t) e^{-3t} \text{ech}(t) + \delta(t)$.

7) a) $H(\omega) = 1 + \frac{1}{(1+j\omega)^2}$,

b) $y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$.

8) a) $h(t) = \frac{1}{4} (e^{-|t+1|} + e^{-|t-1|})$,

b) $y(t) = \frac{1}{4} (e^{-|t|} + e^{-|t-2|})$.

9) a) $H(\omega) = e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$,

b) $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = j\pi[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)]$,

c) $y(t) = \sin t$,

d) $y(t) = (h \star x)(t) = \sin t$.

10) a) $H(\omega) = -\frac{1}{\omega^2+1}$,

b) $h(t) = -\frac{1}{2} e^{-|t|}$,

c) $h''(t) - h(t) = \delta(t)$.

$$11) \text{ a) } H(\omega) = \frac{2j\omega+1}{-12\omega^2+7j\omega+1};$$

$$\text{b) } Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = H(\omega) \cdot \frac{1}{1+j\omega},$$

$$|Y(\omega)| = \frac{\sqrt{1+4\omega^2}}{\sqrt{(1-12\omega^2)^2+49\omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}},$$

$$\arg Y(\omega) = \arg(1+2j\omega) - \arg(1-12\omega^2+7j\omega) - \arg(1+j\omega);$$

$$\text{c) } y(t) = \left[\frac{2}{3} e^{-\frac{t}{4}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{6} e^{-t} \right] \text{ech}(t).$$

$$12) \text{ a) } h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \text{ech}(t),$$

$$\text{b) } h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ech}(t).$$

$$13) u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

Chapitre 4

Signaux discrets et transformées

4.1 Signal discret

Un *signal numérique* (ou discret) est une fonction qui n'est définie que pour certaines valeurs discrètes du temps, on utilise également l'appellation *signal en temps-discret* ou *signal digital*.

Exemple 4.1. Si on effectue un décompte journalier du nombre de clients fréquentant un magasin pendant 50 jours, on obtient 50 valeurs constituant un signal numérique.

Cet exemple montre qu'un signal numérique peut être considéré comme une fonction définie sur un intervalle I inclus dans \mathbb{Z} ; on convient dès lors de le noter

$$f[n], \quad n \in I \subset \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

La variable n varie par pas de 1. En outre, les valeurs d'un signal discret constituent une liste ordonnée de nombres numérotés; il s'agit d'un vecteur si la liste est finie ou d'une suite sinon.

La différence entre un signal discret et un signal analogique se marque non seulement via la notation mais aussi à travers la représentation graphique. Ainsi, si on représente un signal analogique par un graphe habituel (voir figure 4.1), on utilise un diagramme en bâtonnets pour représenter un signal discret (voir figure 4.2).

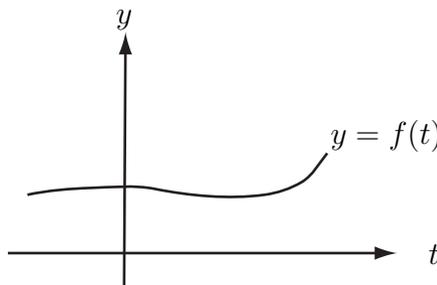
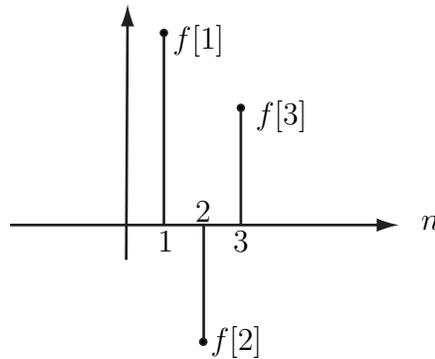


FIGURE 4.1 – Graphe d'un signal analogique $f(t)$.

FIGURE 4.2 – Graphe d'un signal discret $f[n]$.

4.1.1 Propriétés d'un signal discret

De nombreuses propriétés associées aux signaux analogiques ont également leur équivalent discret.

Un signal discret est *réel* si toutes ses valeurs sont réelles ; il est *complexe* sinon.

Le signal analogique $f(t)$ est dit *causal* si $f(t) = 0$, pour tout $t < 0$. De même, le signal discret $f[n]$ est *causal* si

$$f[n] = 0, \quad \forall n < 0. \quad (4.2)$$

Le signal analogique $f(t)$ est *pair* (resp. *impair*) si $f(-t) = f(t)$ (resp. $f(-t) = -f(t)$), $\forall t \in \mathbb{R}$. De même, le signal discret $f[n]$ est *pair* (resp. *impair*) si

$$f[-n] = f[n] \quad (\text{resp. } f[-n] = -f[n]), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

À un signal analogique donné $f(t)$, on peut effectuer un *décalage temporel* (ou *time-shift*) à l'aide de l'opération $f(t - t_0)$. De même, pour le signal discret

$$f[n - n_0], \quad n_0 \in \mathbb{Z}. \quad (4.4)$$

translate le signal $f[n]$ de n_0 vers la droite si $n_0 > 0$ et de n_0 vers la gauche si $n_0 < 0$.

Le *renversement du temps* (ou *time-reversal*) $f(-t)$ produit un signal symétrique à $f(t)$ par rapport à l'axe vertical $t = 0$. Dans un signal discret, on utilise naturellement

$$f[-n], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Le *changement d'échelle de temps* (ou *time-scaling*) $f(at)$, avec $a > 0$, contracte ($a > 1$) ou dilate ($a < 1$) le signal selon l'axe temporel. Dans un signal discret on utilise

$$f[\ell n], \quad \ell \in \mathbb{Z}_0. \quad (4.6)$$

Un signal discret $f[n]$ défini sur \mathbb{Z} est *périodique* s'il existe une constante $N \in \mathbb{N}_0$ telle que

$$f[n + N] = f[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (4.7)$$

La période de f est la plus petite des constantes N obéissant à la condition (4.7).

Proposition 4.2. Si $f[n]$ est un signal numérique de période N , alors

$$f[n + kN] = f[n], \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (4.8)$$

$$\sum_{n=p}^{p+N-1} f[n] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n], \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad (4.9)$$

et, pour tout $a \in \mathbb{Z}_0$ et $b \in \mathbb{Z}$,

$$f[aN + b] \quad (4.10)$$

est périodique de période $\frac{N}{|a|}$ si $\frac{N}{|a|} \in \mathbb{N}_0$.

Démonstration. Les formules (4.8) et (4.10) sont évidentes. Établissons la seconde relation dans laquelle on peut remarquer que les sommes jouent le rôle, pour les signaux discrets, des intégrales pour les signaux analogiques. En divisant p par N , on obtient

$$p = qN + r$$

où le quotient $q \in \mathbb{Z}$ tandis que le reste $r \in \mathbb{N}$ est tel que $0 \leq r \leq N - 1$. En observant que

$$\sum_{n=p}^{p+N-1} f[n] = \sum_{n=p}^{p+N-1} f[n - qN]$$

et en posant $m = n - qN$, cette dernière somme s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{m=r}^{r+N-1} f[m] &= f[r] + \cdots + f[N-1] + f[N] + \cdots + f[N+r-1] \\ &= f[r] + \cdots + f[N-1] + f[0] + \cdots + f[r-1] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n]. \end{aligned}$$

□

Le train d'impulsions unitaires (voir figure 4.3) est le signal discret périodique de période N défini par

$$\delta_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

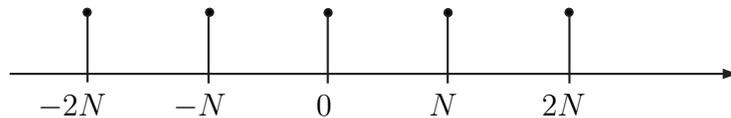


FIGURE 4.3 – Graphe d'un train d'impulsions unitaires de période N .

Tout signal discret périodique de période N s'écrit

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] \delta_N[n - k] \quad (4.11)$$

puisque les deux membres sont des signaux discrets périodiques de période N , visiblement égaux pour $n = 0, \dots, N - 1$.

Un *signal discret* est *harmonique* s'il est de la forme

$$f[n] = c e^{j\omega n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.12)$$

où $c \in \mathbb{C}$ et $\omega > 0$. Un tel signal n'est périodique de période $N = \frac{2\pi}{\omega}$ que si cette expression est un entier naturel. Dans ce cas, les considérations relatives aux signaux analogiques harmoniques restent valables.

On introduit des concepts analogues à la *puissance* et l'*énergie* pour un signal discret $f[n]$. La *puissance* d'un signal discret périodique de période N est définie par

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2. \quad (4.13)$$

L'*énergie* d'un signal discret vaut

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f[n]|^2. \quad (4.14)$$

Un *système discret* associe des signaux discrets d'entrée et de sortie. Il est linéaire aux mêmes conditions qu'un système analogique.

Exemple 4.3. Voici un exemple de système discret dans lequel les signaux d'entrée $x[n]$ et de sortie $y[n]$ sont liés par la relation

$$y[n] = \frac{x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dans un système discret, une équation différentielle du type (3.9) se voit remplacée par une équation aux différences du type

$$b_0 y[n] + b_1 y[n-1] + \dots + b_N y[n-N] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_M x[n-M] \quad (4.15)$$

où les coefficients a_i et b_j sont des constantes complexes. Tout système discret décrit par une telle équation est linéaire.

Un système discret est *invariant* si

$$x[n] \mapsto y[n] \Rightarrow x[n-n_0] \mapsto y[n-n_0], \quad \forall n_0 \in \mathbb{Z}. \quad (4.16)$$

4.1.2 Signal analogique échantillonné

Si on mesure un signal analogique $f(t)$ aux instants nT_e et si on pose

$$f[n] = f(nT_e), \quad n \in \mathbb{Z},$$

on obtient un signal discret dit *échantillonné*, résultant de l'échantillonnage du signal f aux instants nT_e ; les valeurs $f(nT_e)$ constituent les échantillons extraits du signal f . La constante $T_e > 0$ est le *pas d'échantillonnage* ou *période d'échantillonnage*. Chaque fois qu'un signal analogique est traité numériquement, il doit d'abord être échantillonné.

Exemple 4.4. Si on effectue des relevés de température à intervalles réguliers de 3 heures de 0 à 24 heures, on obtient les valeurs

$$T(0), T(3), \dots, T(24)$$

constituant un signal numérique que l'on peut noter sous la forme

$$f[n] = T(3n), \quad n = 0, \dots, 8,$$

avec un pas d'échantillonnage $T_e = 3$ h.

Dans un souci de cohérence avec la convention adoptée dans les chapitres précédents, la *fréquence d'échantillonnage*

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \quad (4.17)$$

désigne en réalité la pulsation (ou fréquence angulaire).

Exemple 4.5. Échantillonnons le signal $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, avec $\omega_0 > 0$, avec différentes fréquences d'échantillonnage ω_e . Nous obtenons les résultats suivants.

1. Si $\omega_e = \omega_0$, le signal devient nul

$$f[n] = f\left(n \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \sin(2n\pi) = 0;$$

2. si $\omega_e = 8\omega_0$, on a

$$f[n] = f\left(n \frac{2\pi}{8\omega_0}\right) = \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)$$

qui est un signal discret périodique de période 8;

3. et si $\omega_e = \pi\omega_0$, on

$$f[n] = f\left(n \frac{2\pi}{\pi\omega_0}\right) = \sin(2n),$$

un signal discret qui n'est plus périodique, malgré la périodicité du signal analogique initial $f(t)$.

Il est possible de préciser les conditions sous lesquelles un signal obtenu par échantillonnage d'un signal périodique est périodique.

Proposition 4.6 (Périodicité d'un signal échantillonné). *Le signal obtenu par échantillonnage d'un signal analogique de fréquence ω_0 est périodique de période N ($N \in \mathbb{N}_0$) si et seulement si*

$$\omega_e = N\omega_0.$$

Démonstration. La période du signal échantillonné $f[n]$ est le plus petit entier positif N tel que

$$f[n + N] = f[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

soit

$$f(nT_e + NT_e) = f(nT_e), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Si T_0 désigne la période du signal $f(t)$, cette condition se traduit par

$$NT_e = T_0$$

ou encore

$$\omega_e = N\omega_0.$$

□

Dans les conditions de la proposition 4.6, la période du signal échantillonné est donnée par

$$N = \frac{T_0}{T_e} = \frac{\omega_e}{\omega_0}.$$

Au signal discret $f[n]$ résultant de l'échantillonnage de $f(t)$, on peut associer un signal analogique $\hat{f}(t)$ dont les seules impulsions se produisent aux instants nT_e , en introduisant le peigne de Dirac de période T_e ,

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \delta(t - nT_e) = f(t) \text{pgn}_{T_e}(t). \quad (4.18)$$

Le signal analogique $\hat{f}(t)$ est appelé *signal analogique échantillonné*.

Proposition 4.7 (Spectre d'un signal analogique échantillonné). *Le spectre d'un signal analogique échantillonné avec la période T_e est périodique de période ω_e .*

Démonstration. Si $F(\omega)$ désigne le spectre du signal $f(t)$, on obtient en vertu des propositions 2.27 et 3.12

$$\mathcal{F}_\omega [\hat{f}(t)] = \frac{1}{2\pi} \left(F(\omega) \star \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_e \delta(\omega - k\omega_e) \right),$$

soit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\omega [\hat{f}(t)] &= \frac{\omega_e}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (F(\omega) \star \delta(\omega - k\omega_e)) \\ &= \frac{\omega_e}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\omega - k\omega_e) \end{aligned}$$

en utilisant la formule (3.26). □

4.2 Reconstruction d'un signal analogique

L'échantillonnage d'un signal analogique $f(t)$ engendre une perte d'information, sauf s'il est possible de reconstituer $f(t)$ à partir des échantillons $f[n]$. Ce procédé, appelé *reconstruction*, est possible sous certaines conditions pour les signaux à bande limitée.

Le signal analogique $f(t)$ est à *bande limitée* s'il existe une constante $\omega_c > 0$ telle que

$$F(\omega) = 0 \quad \text{pour } |\omega| > \omega_c. \quad (4.19)$$

La valeur ω_c désigne la plus petite fréquence positive donnant lieu à (4.19) et est appelée la *fréquence critique*. On appelle *fréquence de Nyquist* le double $2\omega_c$ de la fréquence critique.

Exemple 4.8. *Le signal*

$$f(t) = \frac{\sin(at)}{t} \quad (a > 0)$$

admet le spectre

$$F(\omega) = \frac{\pi}{a} \text{rect}_{2a}(\omega).$$

Ce signal est à bande limitée car $F(\omega) = 0$ pour $|\omega| > a$. La fréquence critique $\omega_c = a$ et la fréquence de Nyquist vaut $2a$.

Proposition 4.9 (Théorème de Shannon). *Si $f(t)$ est un signal analogique à bande limitée de fréquence de Nyquist $2\omega_c$ et si $f[n]$ désigne le signal discret obtenu par échantillonnage de $f(t)$ avec la période T_e , alors on a*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \text{sinc}\left(\frac{\omega_e}{2}(t - nT_e)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

pour autant que $\omega_e > 2\omega_c$.

Démonstration. D'après la proposition 4.7, on sait que

$$\mathcal{F}_\omega [\hat{f}(t)] = \frac{\omega_e}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\omega - k\omega_e).$$

Il s'agit d'une fonction périodique de période ω_e .

Si $\omega_e > 2\omega_c$, les graphes des fonctions $F(\omega - k\omega_e)$ sont disjoints (voir figure 4.4) de sorte que

$$\mathcal{F}_\omega [\hat{f}(t)] = \frac{\omega_e}{2\pi} F(\omega) \quad \text{si } |\omega| \leq \frac{\omega_e}{2}.$$

On peut dès lors écrire

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_e} \mathcal{F}_\omega [\hat{f}(t)] \text{rect}_{\omega_e}(\omega).$$

En prenant la transformée de Fourier inverse des deux membres, on obtient, en utilisant la propriété des produits de convolution de la proposition 3.11,

$$f(t) = \frac{2\pi}{\omega_e} \mathcal{F}_t^{-1} \left[\mathcal{F}_\omega [\hat{f}(t)] \right] \star \mathcal{F}_t^{-1} [\text{rect}_{\omega_e}(\omega)],$$

soit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2\pi}{\omega_e} \frac{1}{2\pi} \hat{f}(t) \star \omega_e \text{sinc}\left(\frac{\omega_e t}{2}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \delta(t - nT_e) \star \text{sinc}\left(\frac{\omega_e t}{2}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \text{sinc}\left(\frac{\omega_e}{2}(t - nT_e)\right) \end{aligned}$$

d'après la formule (3.26). D'où le résultat. □

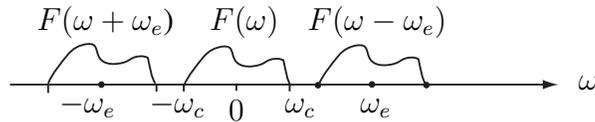


FIGURE 4.4 – Graphe de $\mathcal{F}_\omega [\hat{f}(t)]$ quand $\omega_e > 2\omega_c$.

Le signal $f(t)$ peut être *reconstruit* à partir du signal échantillonné $f[n]$ si $\omega_e > 2\omega_c$. Cette dernière condition est appelée *condition d'échantillonnage*. La reconstruction n'est pas possible si $\omega_e \leq 2\omega_c$. Considérons par exemple le signal $f(t) = \sin(\omega_c t)$ dont le spectre est donné par

$$F(\omega) = -j\pi(\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)).$$

La fréquence de Nyquist vaut $2\omega_c$. Si on échantillonne ce signal à la fréquence $\omega_e = 2\omega_c$, on a

$$f[n] = f(nT_e) = \sin(n\pi) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 4.10. *Le signal*

$$f(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{t^2}$$

admet le spectre

$$F(\omega) = \pi^2 \text{tri}_{4\pi}(\omega).$$

La fréquence de Nyquist vaut donc 4π . En échantillonnant f avec une période $T_e = \frac{1}{4}$, donc avec une fréquence

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = 8\pi > 4\pi,$$

la condition d'échantillonnage est satisfaite. On peut reconstruire $f(t)$ par la formule

$$f(t) = 16 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(n \frac{\pi}{4}\right)}{n^2} \text{sinc}\left(4\pi\left(t - \frac{n}{4}\right)\right). \quad (4.20)$$

Exemple 4.11. *L'oreille humaine n'enregistre que des sons dont la fréquence n'excède pas 20 kHz. Les signaux audibles peuvent donc être considérés comme des signaux à bande limitée dont la fréquence de Nyquist est de $\pi \cdot 80\,000 \text{ rad s}^{-1}$. Afin d'échantillonner des signaux audio sans perte d'information, on devra donc extraire au moins 40 000 échantillons par seconde. Un fichier informatique d'un signal audio échantillonné doit satisfaire à cette condition.*

4.3 Transformée de Fourier discrète

4.3.1 Approche intuitive

Soit $f(t)$ un signal analogique périodique de période T et de fréquence

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Si nous échantillons ce signal avec une période

$$T_e = \frac{T}{N}, \quad N \in \mathbb{N}_0;$$

donc avec une fréquence

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = N\omega_0,$$

nous obtenons un signal discret

$$f[n] = f(nT_e) = f\left(n \frac{T}{N}\right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

périodique de période N en vertu de la proposition 4.6.

Recherchons une approximation des coefficients de la série de Fourier de f

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z};$$

en utilisant les échantillons

$$f[n], \quad n = 0, \dots, N-1,$$

associés aux valeurs de f en des points de l'intervalle $[0, T[$.

Le signal

$$g(t) = f(t)e^{-jk\omega_0 t}$$

est périodique de période T ; le signal discret

$$\begin{aligned} g[n] &= g(nT_e) = g\left(n \frac{T}{N}\right) = f\left(n \frac{T}{N}\right) e^{-\frac{jk\omega_0 nT}{N}} \\ &= f[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

est périodique de période N en vertu de la proposition 4.6.

On peut obtenir une approximation de l'intégrale à l'aide de la méthode d'intégration numérique des trapèzes sur les N intervalles de pas T_e

$$\int_0^T g(t) dt \simeq T_e \left(\frac{g[0]}{2} + g[1] + \dots + g[N-1] + \frac{g[N]}{2} \right).$$

Étant donné que $g[n]$ est périodique de période N , on a $g[0] = g[N]$ et T_e

$$\alpha_k \simeq \frac{T_e}{T} \sum_{n=0}^{N-1} g[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \quad (4.22)$$

ou encore

$$\alpha_k \cong \frac{1}{N} F[k] \quad (4.23)$$

si on introduit l'expression

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}. \quad (4.24)$$

Exemple 4.12. *Considérons le signal analogique périodique de période 2π , défini dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ par*

$$f(t) = 1 - \frac{|t - \pi|}{\pi}.$$

On vérifie aisément que ses coefficients de Fourier sont donnés par

$$\alpha_k = \begin{cases} -\frac{2}{(\pi k)^2} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair et non nul.} \end{cases}$$

Comparons les α_k avec les quantités $\frac{F[k]}{N}$ dans le cas où $N = 128$. Nous obtenons les résultats suivants.

k	α_k	$\frac{F[k]}{N}$
0	0,500 00	0,500 00
1	-0,202 64	-0,202 64
3	-0,022 51	-0,022 56
5	-0,008 11	-0,008 15
	\vdots	\vdots
63	-0,000 05	-0,000 12

Nous constatons que les nombres $\frac{F[k]}{N}$ constituent une bonne approximation de α_k pour les petites valeurs de k .

Le signal discret $F[k]$ joue un rôle important dans le traitement numérique des signaux, et pas uniquement dans l'approximation des coefficients de Fourier d'un signal périodique. C'est pourquoi nous l'appellerons "*transformée de Fourier discrète*" du signal $f[n]$.

4.3.2 Définition

La *transformée de Fourier discrète* du signal discret $f[n]$ périodique de période N ($N \in \mathbb{N}_0$) est le signal discret,

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.25)$$

On dit aussi que $F[k]$ est la transformée de Fourier discrète à N points du signal $f[n]$. En général, on précise rarement le nombre de points car ce nombre découle naturellement du contexte.

En particulier, on a

$$F[0] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n].$$

Comme le signal

$$f[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}$$

est périodique de période N , la formule (4.9) permet d'écrire, suivant que N est un entier pair ou impair :

$$F[k] = \sum_{n=-M}^{M-1} f[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \quad \text{si } N = 2M \quad (4.26)$$

ou

$$F[k] = \sum_{n=-M}^M f[n] e^{-j2\pi nk/N} \quad \text{si } N = 2M + 1. \quad (4.27)$$

Exemple 4.13. Soit $f[n]$ un signal discret de période $N = 5$ tel que

$$f[-2] = -1, \quad f[-1] = -2, \quad f[0] = 0, \quad f[1] = 2, \quad f[2] = 1.$$

Sa transformée de Fourier discrète est donnée, d'après la formule (4.27), par

$$\begin{aligned} F[k] &= \sum_{n=-2}^2 f[n] e^{-j2\pi nk/5} \\ &= -e^{j4\pi k/5} - 2e^{j2\pi k/5} + 2e^{-j2\pi k/5} + e^{-j4\pi k/5} \\ &= -2j \sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right) - 4j \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right). \end{aligned}$$

Exemple 4.14. La transformée de Fourier discrète du signal

$$f[n] = \delta_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } N, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est donnée par

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n] e^{-j2\pi nk/N} = \delta_N[0] 1 = 1.$$

4.3.3 Théorème fondamental

Établissons d'abord deux propriétés auxiliaires de la transformée de Fourier discrète.

Proposition 4.15. Le signal $F[k]$ est périodique de période N .

Démonstration. De fait, on a

$$\begin{aligned} F[k + N] &= \sum_{n=0}^N f[n] e^{-j2\pi(k+N)n/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j2\pi nk/N} e^{-j2\pi n} \\ &= F[k] \end{aligned}$$

puisque $e^{-j2\pi n} = 1$. □

Proposition 4.16. Quel que soit l'entier m , on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi mn/N} = N\delta_N[m]. \quad (4.28)$$

Démonstration. En posant Z , racine $N^{\text{ème}}$ de 1

$$Z = e^{\frac{j2\pi}{N}},$$

on a $Z^N = 1$ et la somme du premier membre s'écrit

$$\sum_{n=0}^{N-1} (Z^m)^n = \begin{cases} N & \text{si } m \text{ est un multiple de } N, \\ \frac{1-Z^{mN}}{1-Z^m} = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'après la formule calculant la somme des termes d'une progression géométrique. D'où le résultat. \square

Cette dernière relation intervient dans la démonstration du théorème fondamental, dont voici l'énoncé.

Proposition 4.17 (Théorème fondamental). *Soit $f[n]$ un signal discret périodique de période N . Si $F[k]$ désigne sa transformée de Fourier discrète, on a*

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (4.29)$$

quel que soit $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. En substituant $F[k]$ dans la somme du second membre, celle-ci s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f[\ell] e^{-\frac{j2\pi \ell k}{N}} \right) e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} f[\ell] e^{\frac{j2\pi(n-\ell)k}{N}} \end{aligned}$$

ou encore, en permutant les signes sommatoires,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} f[\ell] \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi(n-\ell)k}{N}} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} f[\ell] \delta_N[n - \ell] \end{aligned}$$

en utilisant la formule (4.28). Cette dernière somme vaut $f[n]$ d'après (4.11). \square

Il découle du théorème fondamental que $f[n]$ est l'unique signal discret périodique de période N dont la transformée de Fourier discrète est donnée par $F[k]$, puisque $f[n]$ s'obtient à partir de $F[k]$ par la formule (4.29). On dit que $f[n]$ est la *transformée de Fourier discrète inverse* de $F[k]$. Comme pour les signaux continus, on écrit

$$f[n] \leftrightarrow F[k] \quad (4.30)$$

pour signifier que les signaux $f[n]$ et $F[k]$ sont liés par les relations (4.25) et (4.29).

Un signal discret périodique peut donc être décrit dans le *domaine temporel* par $f[n]$ et dans le *domaine fréquentiel* par $F[k]$.

On dit que $F[k]$ constitue le *spectre discret* de $f[n]$; il est complètement déterminé par le *spectre des modules* ou des *amplitudes (complexes)* :

$$\{|F[k]|, k \in \mathbb{Z}\}, \quad (4.31)$$

le *spectre des arguments* ou des *phases (complexes)* :

$$\{\arg F[k], k \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.32)$$

D'après ce qui précède, le spectre d'un signal discret caractérise totalement celui-ci. En particulier, si $f[n]$ et $g[n]$ sont deux signaux discrets de spectres respectifs $F[k]$ et $G[k]$, on a

$$f[n] = g[n] \Leftrightarrow F[k] = G[k]. \quad (4.33)$$

On remarque que la transformée de Fourier discrète inverse se ramène à une transformée de Fourier discrète ordinaire puisqu'en permutant les indices n et k dans (4.29), on obtient

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{F[n]} e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}.$$

Un seul algorithme suffit dès lors pour calculer ces deux transformées.

4.3.4 Dualité

Proposition 4.18 (Principe de dualité). *Si*

$$f[n] \leftrightarrow F[k],$$

alors

$$F[n] \leftrightarrow Nf[-k].$$

Démonstration. De fait, la transformée de Fourier discrète du signal $F[n]$ est donnée par

$$\sum_{n=0}^{N-1} F[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} F[n] e^{\frac{j2\pi n(-k)}{N}} = Nf[-k]$$

d'après la formule (4.29). □

La proposition 4.18 traduit la *dualité* (ou la *réciprocité*) de la transformée de Fourier discrète : si on connaît le spectre $F[k]$ du signal $f[n]$, on peut en déduire le spectre du signal $F[n]$ (qui est encore périodique de période N d'après la proposition 4.15).

Exemple 4.19. *D'après l'exemple 4.14, on sait que*

$$\delta_N[n] \leftrightarrow 1.$$

Il s'ensuit que

$$1 \leftrightarrow N\delta_N[-k] = N\delta_N[k],$$

ce qui signifie

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = N\delta_N[k].$$

On retrouve la relation (4.28).

4.4 Propriétés de la transformée de Fourier discrète

Tous les signaux discrets rencontrés dans ce paragraphe sont supposés périodiques de période N .

4.4.1 Opérations élémentaires

Proposition 4.20 (Spectre d'une combinaison linéaire). *Si*

$$f[n] \leftrightarrow F[k] \quad \text{et} \quad g[n] \leftrightarrow G[k],$$

alors

$$\lambda f[n] + \mu g[n] \leftrightarrow \lambda F[k] + \mu G[k], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. En effet, le spectre du signal $\lambda f[n] + \mu g[n]$ est donné par

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} (\lambda f[n] + \mu g[n]) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} + \mu \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \\ &= \lambda F[k] + \mu G[k]. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.21 (Spectre du signal conjugué). *Si $f[n] \leftrightarrow F[k]$, alors*

$$\overline{f[n]} \leftrightarrow \overline{F[-k]}.$$

Démonstration. De fait, le spectre du signal $\overline{f[n]}$ est donné par

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{f[n]} e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} &= \overline{\sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{\frac{j2\pi nk}{N}}} \\ &= \overline{F[-k]}. \end{aligned}$$

□

4.4.2 Modification dans le domaine temporel

Proposition 4.22 (Translation d'un signal). *Si $f[n] \leftrightarrow F[k]$ et si $n_0 \in \mathbb{Z}$, alors*

$$f[n - n_0] \leftrightarrow e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}} F[k].$$

Démonstration. Si dans la somme

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n - n_0] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}$$

représentant le spectre du signal $f[n - n_0]$, nous posons $m = n - n_0$, cette somme devient

$$\begin{aligned} \sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} f[m] e^{-\frac{j2\pi(m+n_0)k}{N}} &= e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}} \sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} f[m] e^{-\frac{j2\pi m k}{N}} \\ &= e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f[m] e^{-\frac{j2\pi m k}{N}} \end{aligned}$$

en vertu de (4.9); d'où le résultat. □

Exemple 4.23. Comme

$$\delta_N[n] \leftrightarrow 1,$$

on a

$$\delta_N[n - n_0] \leftrightarrow e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}}.$$

Les signaux $f[n]$ et $f[n - n_0]$ ont le même spectre d'amplitudes (complexes) puisque

$$\left| e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}} F[k] \right| = |F[k]|$$

mais pas le même spectre de phases (complexes) car

$$\arg \left(e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}} F[k] \right) = \arg F[k] - \frac{2\pi n_0 k}{N}.$$

Proposition 4.24 (Renversement du temps). Si $f[n] \leftrightarrow F[k]$, alors

$$f[-n] \leftrightarrow F[-k].$$

Démonstration. De fait, le spectre de $f[-n]$ est donné par

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} f[-n] e^{-\frac{j2\pi n k}{N}} &= \sum_{n=0}^{N-1} f[N-n] e^{\frac{j2\pi(N-n)k}{N}} \\ &= \sum_{m=1}^N f[m] e^{\frac{j2\pi m k}{N}} \end{aligned}$$

ou encore en utilisant la relation (4.9) et en rebaptisant m par n

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} f[-n] e^{-\frac{j2\pi n k}{N}} &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{j2\pi n(-k)}{N}} \\ &= F[-k]. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.25 (Parité d'un signal). Un signal discret est pair (resp. impair) si et seulement si son spectre est pair (resp. impair).

Démonstration. Si $f[n]$ désigne un signal discret de spectre $F[k]$, on a

$$f[n] \text{ pair} \Leftrightarrow f[-n] = f[n] \Leftrightarrow F[-k] = F[k] \Leftrightarrow F[k] \text{ pair},$$

d'après la proposition 4.24.

On raisonne de même pour un signal impair. □

On peut adapter l'expression du spectre d'un signal pair ou impair. Si $f[n]$ est pair, on a

$$\begin{aligned} F[k] &= \frac{1}{2}(F[k] + F[-k]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \left(e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} + e^{\frac{j2\pi nk}{N}} \right); \end{aligned}$$

soit

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (4.34)$$

en utilisant les formules d'Euler.

Si $f[n]$ est impair, on montre de manière analogue que

$$F[k] = -j \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (4.35)$$

4.4.3 Modification dans le domaine fréquentiel

Proposition 4.26 (Déphasage d'un signal). *Si $f[n] \leftrightarrow F[k]$ et si $\ell \in \mathbb{Z}$, alors*

$$f[n] e^{\frac{j2\pi \ell n}{N}} \leftrightarrow F[k - \ell].$$

Démonstration. En effet, on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{\frac{j2\pi \ell n}{N}} e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{j2\pi n}{N}(k-\ell)} = F[k - \ell].$$

□

Exemple 4.27. *Comme*

$$1 \leftrightarrow N\delta_N[k],$$

on a

$$e^{\frac{j2\pi \ell n}{N}} \leftrightarrow N\delta_N[k - \ell].$$

4.4.4 Convolution de signaux discrets

Le produit de convolution de deux signaux discrets $f[n]$ et $g[n]$ périodiques de période N est le signal discret

$$(f \star g)[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} f[\ell] g[n - \ell]. \quad (4.36)$$

On établit aisément que le produit de convolution est commutatif; en outre, le signal $(f \star g)[n]$ est visiblement périodique de période N .

Proposition 4.28 (Spectre de convolution). *Si*

$$f[n] \leftrightarrow F[k] \quad \text{et} \quad g[n] \leftrightarrow G[k],$$

alors

$$(f \star g)[n] \leftrightarrow F[k] G[k].$$

Démonstration. En partant de la définition (4.36) et en utilisant les propositions 4.20 et 4.22, le spectre du signal $(f \star g)[n]$ est donné par

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{N-1} f[\ell] G[k] e^{-j2\pi\ell k} &= \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f[\ell] e^{-j2\pi\ell k} \right) G[k] \\ &= F[k] G[k]. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.29 (Spectre d'un produit). *Si*

$$f[n] \leftrightarrow F[k] \quad \text{et} \quad g[n] \leftrightarrow G[k],$$

alors

$$f[n] g[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} (F \star G)[k].$$

Démonstration. Le spectre du signal $f[n] g[n]$ vaut

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n] g[n] e^{-j2\pi n k}$$

ou encore, en utilisant la formule (4.29),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} F[\ell] e^{j2\pi\ell n} \right) g[n] e^{-j2\pi n k} &= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} F[\ell] \left(\sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{-j2\pi n(k-\ell)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} F[\ell] G[k - \ell] \\ &= \frac{1}{N} (F \star G)[k]. \end{aligned}$$

□

4.4.5 Énergie d'un signal discret

Proposition 4.30 (Formule de Parseval). *Si $f[n] \leftrightarrow F[k]$, alors*

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F[k]|^2. \quad (4.37)$$

Démonstration. On obtient successivement

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \overline{f[n]} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \right) \overline{f[n]} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \left(\sum_{n=0}^{N-1} \overline{f[n]} e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \overline{\left(\sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \right)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \overline{F[k]}. \end{aligned}$$

□

La formule de Parseval s'interprète en terme de puissance. Sachant que la puissance d'un signal discret périodique de période N est donnée par

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2,$$

la formule de Parseval exprime que la puissance du signal $f[n]$,

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j\frac{2\pi kn}{N}},$$

est égale à la somme des puissances de chacun des termes du second membre.

La formule de Parseval peut être utilisée pour calculer certaines sommes représentant la puissance de signaux.

Exemple 4.31. *Considérons le signal discret périodique de période N*

$$f[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right).$$

Comme

$$f[n] = \frac{1}{2j} \left(e^{j\frac{2\pi n}{N}} - e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \right),$$

on a

$$f[n] \leftrightarrow F[k] = \frac{N}{2j} (\delta_N[k-1] - \delta_N[k+1])$$

de sorte que

$$\begin{aligned} F[1] &= \frac{N}{2j}, \\ F[N-1] &= F[-1] = -\frac{N}{2j}, \\ F[0] &= F[2] = F[3] = \dots = F[n-2] = 0. \end{aligned}$$

En vertu de (4.37), on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin^2\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = \frac{1}{N} \left(\frac{N^2}{4} + \frac{N^2}{4} \right) = \frac{N}{2}.$$

4.5 Signaux non périodiques

Nous avons vu dans la section 4.3.1 que la transformée de Fourier discrète permettait de calculer de manière approchée les coefficients de Fourier d'une fonction périodique, via la formule (4.23). Nous allons montrer que l'on peut également utiliser la transformée de Fourier discrète pour déterminer le spectre d'une fonction non périodique.

4.5.1 Introduction

Soit $f(t)$ un signal analogique intégrable dans \mathbb{R} . Son spectre est donné par

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Si $T > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-T}^T f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{|t| \geq T} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= F_T(\omega) + R_T(\omega). \end{aligned}$$

Comme le module du reste

$$|R_T(\omega)| \leq \int_{|t| \geq T} |f(t)| dt,$$

tend vers 0 quand $T \rightarrow +\infty$, la fonction $F_T(\omega)$ constitue une approximation crédible de $F(\omega)$ pour autant que T soit suffisamment grand.

Recherchons une valeur approchée de $F_T(\omega)$ en utilisant la méthode des trapèzes. En subdivisant l'intervalle d'intégration $[-T, T]$ en $2N$ intervalles de même largeur $\frac{T}{N}$ et en posant $t_n = n\frac{T}{N}$, on obtient

$$F_T(\omega) \simeq \frac{T}{N} \left(\frac{f(-T)e^{j\omega T}}{2} + \sum_{n=1-N}^{N-1} f(t_n)e^{-j\omega t_n} + \frac{f(T)e^{-j\omega T}}{2} \right).$$

En introduisant le signal discret f_p périodique de période $2N$ défini par

$$\begin{aligned} f_p[n] &= f(t_n), \quad \text{si } n = -N + 1, \dots, N - 1, \\ f_p[-N] &= \frac{1}{2}(f(-T) + f(T)); \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} F_T\left(\frac{k\pi}{T}\right) &\simeq \frac{T}{2N} \left(f(-T)e^{jk\pi} + f(T)e^{-jk\pi} + 2 \sum_{n=1-N}^{N-1} f_p[n] e^{-\frac{j\pi nk}{N}} \right) \\ &\simeq \frac{T}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} f_p[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{2N}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Au facteur $\frac{T}{N}$ près, on voit apparaître la transformée de Fourier discrète à $2N$ points du signal $f_p[n]$.

Si $f(t)$ est un signal causal, on a

$$F_T(\omega) = \int_0^T f(t)e^{-j\omega t} dt$$

et la méthode des trapèzes conduit à

$$F_T(\omega) \simeq \frac{T}{2N} \left(f(0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} f(t_n)e^{-j\omega t_n} + f(T)e^{-j\omega T} \right).$$

En introduisant le signal discret f_p périodique de période N défini par

$$\begin{aligned} f_p[n] &= f(t_n) \quad \text{si } n = 1, \dots, N - 1 \\ f_p[0] &= \frac{1}{2}(f(0) + f(T)); \end{aligned}$$

il vient

$$F_T\left(\frac{2k\pi}{T}\right) \simeq \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_p[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}. \quad (4.39)$$

Le second membre est, au facteur $\frac{T}{N}$ près, la transformée de Fourier discrète à N points du signal $f_p[n]$.

Exemple 4.32. *Considérons le signal causal*

$$f(t) = e^{-2t} \text{ech}(t),$$

dont le spectre est donné par

$$F(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}.$$

En prenant $T = 5$, il vient

$$F(\omega) = F_5(\omega) + R_5(\omega)$$

avec

$$|R_5(\omega)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt \simeq 2,3 \cdot 10^{-5}.$$

Déterminons une approximation de $F_5(\frac{k\pi}{T})$ par une transformée de Fourier discrète à $N = 128$ points conformément à la formule (4.38). On obtient les résultats suivants :

k	$F_5(\frac{k\pi}{T})$	$F(\frac{k\pi}{T})$
0	0,5002	0,5000
1	0,4554 - 0,1429 j	0,4551 - 0,1430 j
2	0,3587 - 0,2252 j	0,3585 - 0,2251 j
3	0,2651 - 0,2493 j	0,2648 - 0,2496 j
\vdots		
63	0,0016 - 0,0200 j	0,0013 - 0,0252 j
64	0,0015 - 0,0195 j	0,0012 - 0,0248 j
65	0,0015 - 0,0195 j	0,0012 - 0,0244 j
\vdots		
126	0,0008 - 0,0002 j	0,0003 - 0,0126 j
127	0,0008 - 0,0005 j	0,0003 - 0,0125 j
128	0,0008 - 0,0007 j	0,0003 - 0,01241 j .

Les approximations ne sont crédibles que pour les petites valeurs de k ; en pratique, on se limite généralement à $k = \frac{N}{2}$.

4.5.2 Transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier discrète à N points transforme le signal discret $f[n]$ périodique de période N en un signal discret $F[k]$ de même type

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] Z_N^{nk} \quad (4.40)$$

où nous avons posé une racine $N^{\text{ème}}$ de l'unité

$$Z_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}},$$

telle que $Z_N^N = 1$.

Le calcul de $F[k]$, pour une valeur fixée de k , nécessite $2(N-1)$ opérations élémentaires : $(N-1)$ multiplications et $(N-1)$ additions. Par conséquent, le calcul des $F[k]$ pour $k = 0, \dots, N-1$ exige

$$2N(N-1) = 2N^2 - 2N \quad (4.41)$$

opérations élémentaires. Ce nombre, de l'ordre de N^2 , prend des valeurs d'autant plus grandes que N est grand. Il en résulte un risque accru de propagation d'erreurs d'arrondi qui risquent d'entacher la crédibilité des résultats obtenus.

La transformée de Fourier rapide (en anglais *fast Fourier transform*, ou FFT en abrégé) est un algorithme qui réduit le nombre d'opérations de la transformée de Fourier discrète. Elle est basée sur

une factorisation de N . Nous allons décrire la FFT dans le cas où N est un nombre pair de sorte que $N = 2N_2$.

Soit $N = 2N_2$ où $N_2 \in \mathbb{N}_0$. Calculons $F[k]$ pour $k = 0, \dots, N - 1$ d'après la formule (4.40).

En effectuant une division entière de n par 2, on obtient

$$n = 2n_2 + n_1 \quad (4.42)$$

avec $0 \leq n_1 \leq 1$ et $n_2 \geq 0$.

Puis, en divisant k par N_2 , on a

$$k = k_1 N_2 + k_2 \quad (4.43)$$

avec $0 \leq k_1 \leq 1$ et $k_2 \leq N_2 - 1$.

Par conséquent,

$$F[k] = \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f[2n_2 + n_1] Z_N^{(2n_2+n_1)(k_1 N_2+k_2)}.$$

Comme

$$\begin{aligned} Z_N^{(2n_2+n_1)(k_1 N_2+k_2)} &= Z_N^{2n_2 k_1 N_2} Z_N^{2n_2 k_2} Z_N^{n_1 k_1 N_2} Z_N^{n_1 k_2} \\ &= Z_N^{n_2 k_1 N} e^{-\frac{j2\pi n_2 k_2}{N_2}} e^{-j\pi n_1 k_1} Z_N^{n_1 k_2} \\ &= 1 Z_{N_2}^{n_2 k_2} (-1)^{n_1 k_1} Z_N^{n_1 k_2}, \end{aligned}$$

il vient

$$F[k] = \sum_{n_1=0}^1 (-1)^{n_1 k_1} Z_N^{n_1 k_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f[2n_2 + n_1] Z_{N_2}^{n_2 k_2}. \quad (4.44)$$

Posons

$$C_{N_2}[n_1, k_2] = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f[2n_2 + n_1] Z_{N_2}^{n_2 k_2}.$$

Les expressions

$$C_{N_2}[0, k_2] \quad \text{et} \quad C_{N_2}[1, k_2] \quad (k_2 = 0, \dots, N_2 - 1)$$

représentent respectivement les spectres des signaux discrets

$$f[2n_2] \quad \text{et} \quad f[2n_2 + 1] \quad (n_2 = 0, \dots, N_2 - 1)$$

périodiques de période N_2 .

L'expression (4.44) de $F[k]$ devient

$$F[k_1 N_2 + k_2] = C_{N_2}[0, k_2] + (-1)^{k_1} Z_N^{k_2} C_{N_2}[1, k_2]. \quad (4.45)$$

La transformée de Fourier discrète à N points s'obtient donc à partir de deux transformée de Fourier discrète à $\frac{N}{2}$ points. En séparant les cas $k_1 = 0$ et $k_1 = 1$, on obtient,

$$F[k_2] = C_{N_2}[0, k_2] + Z_N^{k_2} C_{N_2}[1, k_2] \quad (k_2 = 0, \dots, N_2 - 1); \quad (4.46)$$

$$F[N_2 + k_2] = C_{N_2}[0, k_2] - Z_N^{k_2} C_{N_2}[1, k_2] \quad (k_2 = 0, \dots, N_2 - 1). \quad (4.47)$$

Afin de donner une version matricielle de la FFT, introduisons les matrices de dimensions $2 \times N_2$:

$$\begin{aligned} M_f &= \begin{pmatrix} f[0] & f[2] & \dots & f[2N_2 - 2] \\ f[1] & f[3] & \dots & f[2N_2 - 1] \end{pmatrix} \\ C_{N_2} &= \begin{pmatrix} C_{N_2}[0, 0] & C_{N_2}[0, 1] & \dots & C_{N_2}[0, N_2 - 1] \\ C_{N_2}[1, 0] & Z_N C_{N_2}[1, 1] & \dots & Z_N^{N_2-1} C_{N_2}[1, N_2 - 1] \end{pmatrix} \\ M_F &= \begin{pmatrix} F[0] & F[1] & \dots & F[N_2 - 1] \\ F[N_2] & F[N_2 + 1] & \dots & F[2N_2 - 1] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'algorithme de calcul de la transformée de Fourier discrète du signal $f[n]$ périodique de période N comporte donc les étapes suivantes :

1. construire la matrice M_f ,
2. la première ligne de la matrice C_{N_2} est la transformée de Fourier discrète à N_2 points du signal dont les valeurs occupent la première ligne de M_f ,
3. la deuxième ligne de la matrice C_{N_2} s'obtient de manière analogue à une différence près : l'élément $C_{N_2}[1, k_2]$ occupant la colonne k_2 doit être multiplié par le facteur $Z_N^{k_2}$,
4. les éléments d'une colonne de M_F s'obtiennent par les formules (4.46) et (4.47), respectivement en ajoutant et en soustrayant les éléments de la colonne correspondante de la matrice C_{N_2} : chaque colonne de M_F est donc la transformée de Fourier discrète à 2 points du signal discret périodique de période 2 dont les valeurs occupent la colonne correspondante de C_{N_2} .

Évaluons le nombre d'opérations (complexes) exigées par les formules (4.46) et (4.47) :

1. $2(2N_2^2 - 2N_2)$ pour le calcul de deux transformées de Fourier discrète à N_2 points ;
2. $N_2 - 1$ pour le calcul des $Z_N^{k_2}$ ($k_2 = 1, \dots, N_2 - 1$) ;
3. N_2 additions pour les $F[k_2]$;
4. N_2 soustractions pour les $F[N_2 + k_2]$.

On arrive donc à un total de

$$2(2N_2^2 - 2N_2) + 3N_2 - 1 = N^2 - \frac{N}{2} - 1.$$

Par rapport à la transformée de Fourier discrète classique, le nombre d'opérations est donc approximativement divisé par 2.

Le calcul d'une transformée de Fourier discrète à $N = 2^m$ points est courant en pratique. On applique successivement $(m - 1)$ fois l'algorithme de la FFT.

Si nous désignons par $\phi(m)$ le nombre d'opérations exigées par cette méthode, on a

$$\phi(m) = 2\phi(m - 1) + 3 \cdot 2^{m-1} - 1, \quad \forall m \geq 2.$$

Comme $\phi(1) = 2$, on établit aisément par récurrence que

$$\phi(m) = (3m - 2)2^{m-1} + 1 = \mathcal{O}(m2^{m-1}).$$

Le nombre d'opérations est de l'ordre de

$$m2^m = N \log_2 N. \quad (4.48)$$

Comparé à N^2 , il s'agit d'une réduction considérable pour les grandes valeurs de N : pour $N = 2^{10}$ ($\simeq 10^3$), on a de l'ordre de cent fois moins d'opérations

$$N \log_2 N \simeq 10^4 \ll N^2 \simeq 10^6.$$

Applications

4.5.3 Exercices

- 1) Déterminer le spectre d'un signal périodique discret de période 2.
- 2) Calculer la transformée de Fourier discrète du signal discret alterné $+1, -1,$
 - a) à 2 points,
 - b) à 4 points.
- 3) Un signal périodique discret de période 4 est donné par

$$f[-2] = 1, \quad f[-1] = 0, \quad f[0] = 2, \quad f[1] = 0.$$

Déterminer le spectre de f .

- 4) Calculer la transformée de Fourier discrète du signal périodique de période N

$$f[n] = e^{\frac{j2\pi\ell n}{N}}$$

où ℓ désigne un entier.

- 5) La figure 4.5 donne le graphe dans l'intervalle $[0, T]$ du signal $f(t)$ périodique de période T :

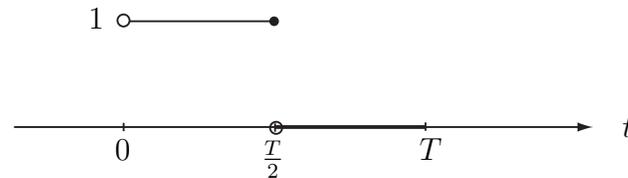


FIGURE 4.5 – Graphe de $f(t)$ pour l'exercice 5.

Comparer le coefficient de Fourier α_0 de $f(t)$ avec la valeur $F[0]$ de la transformée de Fourier discrète à N points de $f(t)$ dans le cas où N est pair et dans le cas où N est impair.

- 6) Reprendre la même question avec le signal $f(t)$ dont le graphe dans $[0, T]$ présenté sur la figure 4.6.

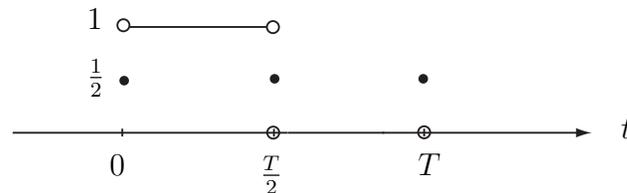


FIGURE 4.6 – Graphe de $f(t)$ pour l'exercice 6.

- 7) Soit $f[n]$ un signal discret périodique de période 3. Si

$$w = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

montrer que la transformée de Fourier discrète $F[k]$ de $f[n]$ est donnée par

$$F[k] = f[0] + w^k f[1] + w^{2k} f[2].$$

- 8) Soit $f[n]$ un signal discret périodique de période 4, réel et pair. Montrer que la transformée de Fourier discrète $F[k]$ de $f[n]$ est donnée par

$$\begin{aligned} F[0] &= f[0] + 2f[1] + f[2] \\ F[1] &= f[0] - f[2] \\ F[2] &= f[0] - 2f[1] + f[2] \\ F[3] &= F[1]. \end{aligned}$$

- 9) Déterminer la transformée de Fourier discrète inverse du signal $F[k]$ périodique de période 4 donné par

$$F[0] = 1, \quad F[1] = 0, \quad F[2] = 0, \quad F[3] = 1.$$

- 10) Le signal discret $f[n]$ périodique de période 4 admet le spectre

$$F[k] = 2e^{\frac{jk\pi}{2}}.$$

Calculer $f[n]$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

- 11) Le signal discret $f[n]$ de période N est donné par

$$f[n] = \delta_N[n] + \delta_N[n - 1].$$

Calculer le produit de convolution $(f \star f)[n]$.

- 12) Le signal discret $f[n]$ de période N admet le spectre

$$F[k] = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \sin\left(\frac{4\pi k}{N}\right).$$

Déterminer $f[n]$ en utilisant le théorème de convolution dans le domaine temporel.

- 13) Si $f[n]$ et $g[n]$ sont des signaux discrets de période N et si

$$f[n] \leftrightarrow F[k], \quad g[n] \leftrightarrow G[k],$$

montrer que

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]G[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k]g[k].$$

- 14) Calculer

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{n\pi}{N}\right).$$

- 15) Les coefficients de Fourier du signal $f(t)$ périodique de période T sont donnés par

$$\alpha_{-2} = \alpha_2 = 1, \quad \alpha_{-1} = \alpha_1 = 2, \quad \alpha_0 = 1;$$

tous les autres coefficients étant nuls.

Soit $g[n]$ le signal discret périodique de période 5 tel que

$$g[-2] = \alpha_{-2}, \quad g[-1] = \alpha_{-1}, \quad g[0] = \alpha_0, \quad g[1] = \alpha_1, \quad g[2] = \alpha_2.$$

- a) Déterminer le spectre $G[k]$ de $g[n]$.
 b) Vérifier que

$$f\left(\frac{2\pi m}{5\omega_0}\right) = G[-m], \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

si $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

- c) Montrer que

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 |G(k)|^2.$$

16) Les signaux discrets $f[n]$ et $g[n]$ périodiques de période N sont donnés par

$$\begin{aligned} f[n] &= \delta_N[n+1] - \delta_N[n] + \delta_N[n-1], \\ g[n] &= \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right). \end{aligned}$$

- a) Déterminer le spectre de $f[n]$.
 b) Calculer le produit de convolution $(f \star g)[n]$.
 c) Calculer la puissance du signal $g[n]$.

4.5.4 Solutions

- 1) $F[k] = f[0] + (-1)^k f[1]$.
- 2) a) $F[0] = 0, \quad F[1] = 2;$
 b) $F[0] = 0, \quad F[1] = 0, \quad F[2] = 4, \quad F[3] = 0.$
- 3) $F[k] = 2 + (-1)^k.$
- 4) $F[k] = N\delta_N[\ell - k].$
- 5) $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{F[0]}{N} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } N \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2N} & \text{si } N \text{ est impair.} \end{cases}$
- 6) $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{F[0]}{N} = \frac{1}{2}.$
- 9) $f[n] = \frac{1}{4}(1 + (-j)^n).$
- 10) $f[1] = 0, \quad f[2] = 0, \quad f[3] = 2, \quad f[4] = 0.$
- 11) $(f \star f)[n] = \delta_N[n] + 2\delta_N[n-1] + \delta_N[n-2].$
- 12) $f[n] = \frac{1}{4j}(\delta_N[n-3] + \delta_N[n-1] + \delta_N[n+1] + \delta_N[n+3]).$
- 14) $\frac{3N}{8}.$

15) a) $G[k] = 1 + 2 \cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right) + 4 \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right),$

c) $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 |G(k)|^2 = 11.$

16) a) $F(k) = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - 1,$

b) $(f \star g)[n] = g[n] \left(2 \cos \frac{4\pi}{N} - 1\right),$

c) $\frac{1}{2}.$

Chapitre 5

Transformée de Laplace

5.1 Transformée de Laplace d'un signal

En physique, on utilise régulièrement des signaux qui ont été excités à un certain instant. Si on choisit cet instant comme origine de l'échelle du temps, ces signaux sont représentés par des fonctions nulles pour $t < 0$. Ces signaux sont dits *causaux*.

La transformée de Fourier d'un tel signal est donnée par

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Elle n'est définie que si $f(t) \in L_1(]0, +\infty[)$, condition rarement réalisée en pratique.

En particulier, la transformée de Fourier du signal échelon-unité $\text{ech}(t)$ n'existe pas. En vue de déterminer le spectre de ech , nous avons dû recourir à la théorie des distributions. Cependant, si nous multiplions $\text{ech}(t)$ par le facteur $e^{-\sigma t}$ ($\sigma > 0$), le spectre de la fonction $\text{ech}(t)e^{-\sigma t}$ existe et est donné par

$$\int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-\sigma t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \frac{1}{\sigma + j\omega}.$$

Ce phénomène se généralise : si une fonction $f(t)$ nulle sous 0 ne possède pas de spectre, il y a gros à parier que le spectre de la fonction

$$g(t) = e^{-\sigma t} f(t)$$

existe ; ce spectre nous conduit à l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-\sigma t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} f(t) dt$$

qui représente une fonction de la variable complexe $p = \sigma + j\omega$, appelée *transformée de Laplace* de la fonction f et notée $\mathcal{L}_p f$.

5.1.1 Définition

Soit f une fonction de la variable réelle t . La *transformée (unilatérale)¹ de Laplace* de f est la fonction F définie par l'intégrale

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in \mathbb{C} \quad (5.2)$$

pourvu que cette intégrale existe. On écrit aussi

$$F(p) = \mathcal{L}_p f \quad \text{ou} \quad F(p) = \mathcal{L}_p[f(t)].$$

La fonction F est donc une fonction de la variable complexe p . L'étude de ces fonctions sort du cadre de ce cours. C'est pourquoi les propriétés de F seront établies dans le cas où $p \in \mathbb{R}$. Cependant, la plupart des propriétés seront valables pour $p \in \mathbb{C}$. On dit que F est définie dans le *p -domaine*, également appelé *domaine des fréquences complexes*.

On a donc

$$\mathcal{L}_p[f(t)] = \int_{\mathbb{R}} e^{-pt} f(t) \text{ech}(t) dt$$

et il vient

$$\mathcal{L}_p[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \text{ech}(t) dt = \mathcal{L}_p[f(t) \text{ech}(t)].$$

La transformée de Laplace de f ignore les valeurs $f(t)$ pour $t < 0$. C'est pourquoi nous supposons dorénavant que *tous les signaux* rencontrés dans la suite de ce chapitre *sont causaux*, c'est-à-dire qu'ils sont nuls pour $t < 0$, ce qui nous évitera de remplacer $f(t)$ par $f(t) \text{ech}(t)$ et permettra ainsi d'alléger les notations.

La transformée de Laplace est étroitement liée à la transformée de Fourier. Si nous notons σ la partie réelle de p et ω la partie imaginaire, alors

$$\mathcal{L}_p f = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-\sigma t} f(t) dt = \mathcal{F}_\omega[e^{-\sigma t} f(t) \text{ech}(t)].$$

Exemple 5.1. Calculons $\mathcal{L}_p 1$: en accord avec notre convention de n'utiliser que des signaux causaux, nous calculons donc la transformée de Laplace de la fonction $\text{ech}(t)$.

On a

$$\mathcal{L}_p 1 = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt.$$

Étudions les conditions d'existence de cette intégrale :

$$\begin{aligned} e^{-pt} \in L_1(]0, +\infty[) &\Leftrightarrow |e^{-pt}| = e^{-(\mathcal{R}p)t} \in L_1(]0, +\infty[); \\ &\Leftrightarrow \mathcal{R}p > 0. \end{aligned}$$

1. Il existe également une transformée de Fourier bilatérale de Laplace définie par

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in \mathbb{C} \quad (5.1)$$

dont la transformée de Fourier est un cas particulier si p est un nombre imaginaire pur $j\omega$.

Si $\Re p > 0$, on obtient

$$\mathcal{L}_p 1 = -\frac{1}{p} [e^{-pt}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{p} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} - 1 \right).$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-pt}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\Re p)t} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0,$$

il vient

$$\mathcal{L}_p 1 = \frac{1}{p} \quad \text{si } \Re p > 0. \quad (5.3)$$

5.1.2 Conditions d'existence

Il résulte de la définition que $\mathcal{L}_p f$ est défini si et seulement si

$$e^{-pt} f(t) \in L_1(]0, +\infty[).$$

Comme cette condition d'intégrabilité n'est pas toujours facile à établir, nous allons fournir des conditions suffisantes d'existence de $\mathcal{L}_p f$ beaucoup plus faciles à vérifier en pratique (et qui sont d'ailleurs satisfaites par les signaux utilisés en électronique).

Soit f une fonction de la variable réelle t . On dit que f est d'ordre exponentiel r ($r \in \mathbb{R}$) en $+\infty$ si on peut trouver des constantes $M > 0$ et $C > 0$ telles que

$$|f(t)| \leq C e^{rt}, \quad \forall t \in [M, +\infty[. \quad (5.4)$$

La condition (5.4) est réalisée si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} f(t) \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

auquel cas la fonction $e^{-rt} f(t)$ est bornée dans un voisinage $[M, +\infty[$ de $+\infty$: on a donc

$$\exists C > 0 : |e^{-rt} f(t)| \leq C, \quad \forall t \in [M, +\infty[;$$

soit

$$|f(t)| \leq C e^{rt}, \quad \forall t \in [M, +\infty[.$$

La plupart des fonctions élémentaires sont d'ordre exponentiel en $+\infty$:

- toute fonction bornée dans un voisinage de $+\infty$ est d'ordre exponentiel 0 en $+\infty$: c'est le cas des fonctions $\sin t$, $\cos t$, $\text{th } t$, $\text{arctg } t$ et des signaux usuels introduits précédemment ;
- $e^{\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) est d'ordre exponentiel $\Re \alpha$ en $+\infty$ puisque

$$|e^{\alpha t}| = |e^{(\Re \alpha)t} e^{j(\Im \alpha)t}| = e^{(\Re \alpha)t} |e^{j(\Im \alpha)t}| = e^{(\Re \alpha)t}$$

en notant que $|e^{j\theta}| = 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$;

- $\text{sh } t$, $\text{ch } t$ sont d'ordre exponentiel 1 en $+\infty$ car

$$\left| \begin{Bmatrix} \text{sh } t \\ \text{ch } t \end{Bmatrix} \right| \leq \frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq \frac{e^t + e^t}{2} = e^t, \quad \forall t \in [0, +\infty[;$$

— tout polynôme est d'ordre exponentiel ε en $+\infty$ quel que soit $\varepsilon > 0$: de fait, il suffit de remarquer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon t} t^m = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}$$

et d'utiliser (5.5).

Bien entendu, la somme et le produit de deux fonctions d'ordre exponentiel r_1, r_2 en $+\infty$ sont encore respectivement d'ordre exponentiel $\max(r_1, r_2)$ et $r_1 + r_2$ en $+\infty$.

Exemple 5.2. Certaines fonctions, telles e^{t^2} , ne sont pas d'ordre exponentiel en $+\infty$. En effet, si

$$e^{t^2} \leq C e^{rt}, \quad \forall t \in [M, +\infty[,$$

on aurait

$$e^{t^2 - rt} \leq C, \quad \forall t \in [M, +\infty[,$$

ce qui est impossible puisque

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t^2 - rt} = +\infty.$$

Proposition 5.3 (Théorème d'existence). *Si f est continu par morceaux dans $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel r en $+\infty$, alors $\mathcal{L}_p f$ est défini si $\mathcal{R}p > r$.*

Démonstration. Sous les hypothèses, on a

$$|f(t)| \leq C e^{rt}, \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad (5.6)$$

C désignant une constante positive. De fait, d'après (5.4), il existe des constantes $M > 0$ et $C_1 > 0$ telles que

$$|f(t)| \leq C_1 e^{rt}, \quad \forall t \in [M, +\infty[.$$

D'autre part, la fonction $|f(t)|e^{-rt}$, étant continue par morceaux dans $[0, +\infty[$, est bornée dans $[0, M]$:

$$|f(t)|e^{-rt} \leq C_2, \quad \forall t \in [0, M].$$

Il s'ensuit que

$$|f(t)| \leq C e^{rt}, \quad \forall t \in [0, +\infty[$$

si $C = \max(C_1, C_2)$.

Dès lors, il vient

$$|e^{-pt} f(t)| = e^{-(\mathcal{R}p)t} |f(t)| \leq C e^{-(\mathcal{R}p-r)t}, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Comme $e^{-(\mathcal{R}p-r)t} \in L_1(]0, +\infty[$ si $\mathcal{R}p > r$, le critère de Lebesgue assure l'intégrabilité de $e^{-pt} f(t)$ dans $]0, +\infty[$. D'où le résultat. \square

5.2 Propriétés de la transformée de Laplace

5.2.1 Opérations élémentaires

Proposition 5.4 (Combinaison linéaire). *Si $\mathcal{L}_p f_1, \dots, \mathcal{L}_p f_m$ existent pour p fixé, alors quels que soient les nombres complexes λ_i ($i = 1, \dots, m$), la transformée $\mathcal{L}_p (\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i)$ existe aussi et on a*

$$\mathcal{L}_p \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathcal{L}_p f_i. \quad (5.7)$$

Démonstration. De fait,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \right) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(t) \right) dt, \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_i(t) dt \end{aligned}$$

puisque chacune de ces intégrales existe. D'où le résultat. \square

5.2.2 Modification dans le domaine temporel

Proposition 5.5 (Théorème du retard). *Si $\mathcal{L}_p f$ est défini lorsque $\Re p > r$ et si $t_0 > 0$, on a*

$$\mathcal{L}_p [f(t - t_0) \text{ech}(t - t_0)] = e^{-pt_0} \mathcal{L}_p [f(t)] \quad \text{si } \Re p > r. \quad (5.8)$$

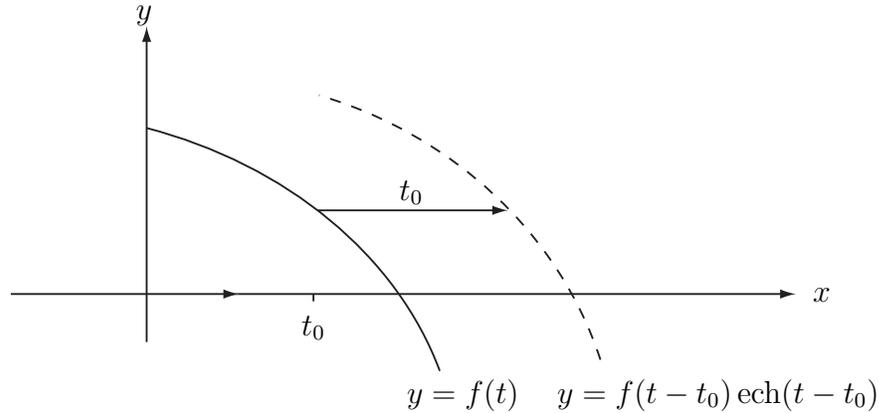


FIGURE 5.1 – Décalage temporel d'un signal.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p [f(t - t_0) \text{ech}(t - t_0)] &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t - t_0) \text{ech}(t - t_0) dt, \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt \end{aligned}$$

puisque $\text{ech}(t - t_0) = 0$ dès que $t < t_0$. En posant $t - t_0 = s$ de sorte que

$$t = t_0 + s \quad \text{et} \quad dt = ds,$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p[f(t - t_0) \text{ech}(t - t_0)] &= \int_0^{+\infty} e^{-p(t_0+s)} f(s) ds, \\ &= e^{-pt_0} \int_0^{+\infty} e^{-ps} f(s) ds, \\ &= e^{-pt_0} \mathcal{L}_p[f(t)] \end{aligned}$$

pourvu que $\mathcal{R}p > r$. □

La fonction $f(t)$ étant supposée nulle pour $t < 0$, la fonction $f(t - t_0)$ est nulle pour $t < t_0$: la présence du facteur $\text{ech}(t - t_0)$ dans le membre de gauche de (5.8) n'est pas absolument indispensable. Si nous avons choisi de l'introduire, c'est pour mieux mettre en évidence le fait que $f(t - t_0)\text{ech}(t - t_0)$ est nulle pour $t < t_0$. Cependant, ce facteur $\text{ech}(t - t_0)$ devient nécessaire si on translate la fonction échelon-unité de t_0 vers la droite : on obtient alors

$$\mathcal{L}_p[\text{ech}(t - t_0)] = \frac{e^{-pt_0}}{p} \quad \text{si } \mathcal{R}p > 0. \quad (5.9)$$

Donnons deux applications du théorème du retard.

Exemple 5.6 (Transformée de Laplace d'une impulsion rectangulaire). *Calculons la transformée de Laplace de la fonction rectangulaire de la figure 5.2*

$$f(t) = E \text{ech}(t - a) - E \text{ech}(t - b). \quad (5.10)$$

D'après (5.7) et (5.9), il vient

$$\mathcal{L}_p f = E \frac{e^{-ap}}{p} - E \frac{e^{-bp}}{p} = \frac{E}{p} (e^{-ap} - e^{-bp}) \quad (5.11)$$

si $\mathcal{R}p > 0$.

Exemple 5.7 (Transformée de Laplace d'une impulsion sinusoïdale). *Soit la fonction*

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } t \in [0, \pi], \\ 0 & \text{si } t > \pi, \end{cases}$$

représentée sur la figure 5.3. On peut écrire

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin t [\text{ech}(t) - \text{ech}(t - \pi)] \\ &= \sin t \text{ech}(t) - \sin t \text{ech}(t - \pi) \\ &= \sin t \text{ech}(t) + \sin(t - \pi) \text{ech}(t - \pi), \end{aligned}$$

d'où en admettant que $\mathcal{L}_p(\sin t) = \frac{1}{p^2+1}$ (formule (5.16))

$$\mathcal{L}_p[f(t)] = \mathcal{L}_p[\sin t] (1 + e^{-p\pi}) = \frac{1}{p^2 + 1} (1 + e^{-p\pi}). \quad (5.12)$$

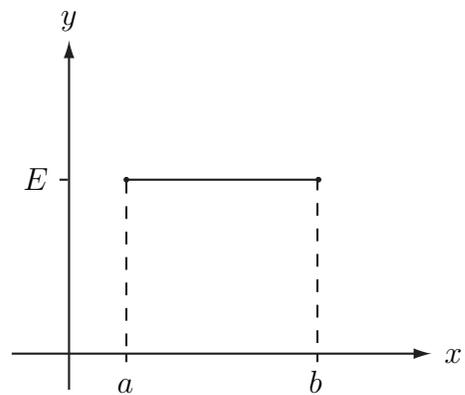


FIGURE 5.2 – Signal rectangulaire.

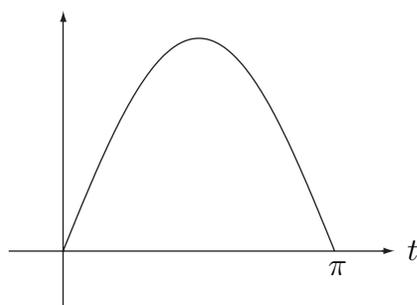


FIGURE 5.3 – Impulsion sinusoïdale.

Proposition 5.8 (Facteur d'échelle). Si $\mathcal{L}_p f$ est défini lorsque $\mathcal{R}p > r$ et si $a > 0$, on a

$$\mathcal{L}_p[f(at)] = \frac{1}{a} \mathcal{L}_{\frac{p}{a}}[f(t)] \quad \text{si } \mathcal{R}p > ar. \quad (5.13)$$

Démonstration. Si dans l'intégrale

$$\mathcal{L}_p[f(at)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at) dt,$$

on effectue le changement de variables

$$s = at \Leftrightarrow t = \frac{s}{a}$$

de sorte que $dt = \frac{1}{a} ds$, il vient

$$\mathcal{L}_p[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}s} f(s) ds = \frac{1}{a} \mathcal{L}_{\frac{p}{a}}[f(t)]$$

pourvu que

$$\mathcal{R}\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a} \mathcal{R}p > r.$$

D'où le résultat. □

5.2.3 Transformée d'une fonction périodique

Le théorème du retard permet également de calculer la transformée de Laplace d'une fonction périodique à motif (voir figure 5.4).

Proposition 5.9 (Transformée d'une fonction périodique). Si f est une fonction périodique de période T continue par morceaux dans $[0, T]$, alors $\mathcal{L}_p f$ est défini si $\mathcal{R}p > 0$ et on a

$$\mathcal{L}_p[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \mathcal{L}_p[f_0(t)]$$

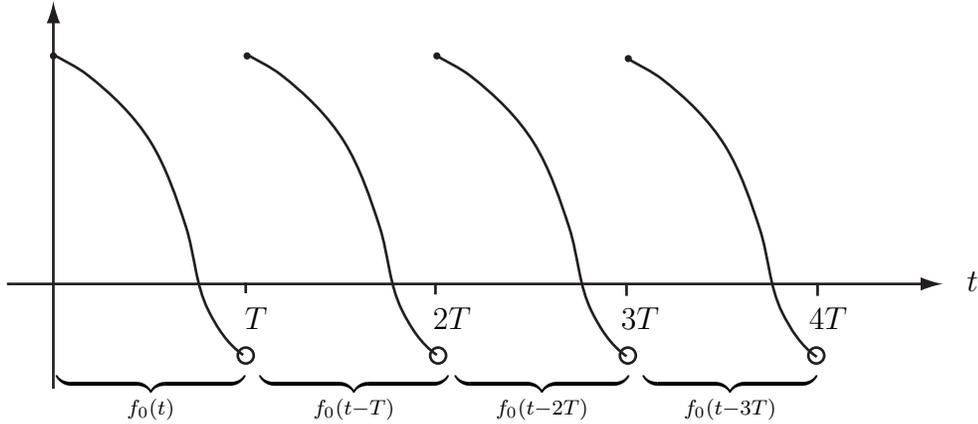
où f_0 est la fonction motif de f définie par

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, T[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Comme f est continue par morceaux et bornée dans $[0, T]$, elle reste continue par morceaux et bornée dans $[0, +\infty[$ de par sa périodicité. Elle est donc d'ordre exponentiel 0 en $+\infty$ de sorte que $\mathcal{L}_p f$ est défini si $\mathcal{R}p > 0$.

En outre, on peut écrire :

$$f(t) = f_0(t) + f_0(t - T) + f_0(t - 2T) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT)$$

FIGURE 5.4 – Fonction périodique f de période T et de motif f_0 .

d'où

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_p[f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT) \right) dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_0(t - kT) dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_p[f_0(t - kT)] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} \mathcal{L}_p[f_0(t)]
 \end{aligned}$$

en appliquant le théorème du retard. Il s'ensuit que

$$\mathcal{L}_p[f(t)] = \mathcal{L}_p[f_0(t)] \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-pT})^k = \frac{\mathcal{L}_p[f_0(t)]}{1 - e^{-pT}}$$

puisque la série obtenue est une série géométrique de raison e^{-pT} avec $|e^{-pT}| = e^{-(\mathcal{R}p)T} < 1$ si $\mathcal{R}p > 0$. \square

Exemple 5.10. Calculons la transformée de Laplace du signal carré $f(t)$ périodique de période T (voir figure 5.5). La fonction motif étant définie par

$$f_0(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2}, \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} < t < T, \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right\} = \text{ech}(t) - \text{ech}\left(t - \frac{T}{2}\right) - \left[\text{ech}\left(t - \frac{T}{2}\right) - \text{ech}(t - T) \right],$$

on obtient, si $\mathcal{R}p > 0$,

$$\mathcal{L}_p[f(t)] = \frac{\mathcal{L}_p[f_0(t)]}{1 - e^{-pT}} = \frac{\frac{1}{p} \left(1 - 2e^{-p\frac{T}{2}} + e^{-pT} \right)}{1 - e^{-pT}} = \frac{1}{p} \frac{1 - e^{-p\frac{T}{2}}}{1 + e^{-p\frac{T}{2}}} = \frac{1}{p} \text{th} \frac{pT}{4}.$$

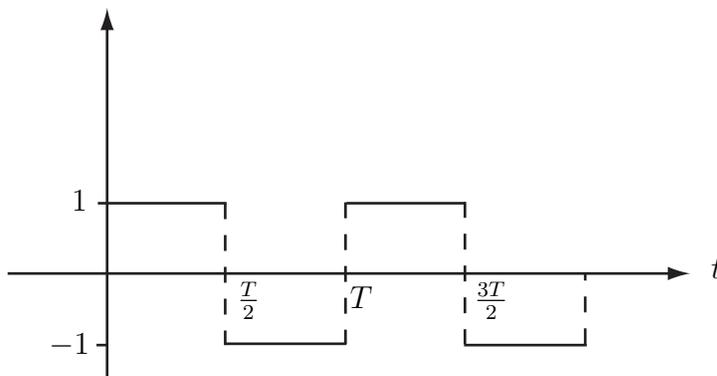


FIGURE 5.5 – Signal carré périodique.

5.2.4 Modification dans le domaine fréquentiel

Proposition 5.11. Si $\mathcal{L}_p f$ est défini lorsque $\Re p > r$ et si $\alpha \in \mathbb{C}$, alors

$$\mathcal{L}_p[e^{\alpha t} f(t)] = \mathcal{L}_{p-\alpha}[f(t)] \quad (5.14)$$

pourvu que $\Re(p - \alpha) > r$.

Démonstration. Il suffit de noter que

$$\mathcal{L}_p[e^{\alpha t} f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} f(t) dt = \mathcal{L}_{p-\alpha}[f(t)]$$

pour autant que $\Re(p - \alpha) > r$, afin d'assurer l'intégrabilité de $e^{-(p-\alpha)t} f(t)$ dans $]0, +\infty[$. \square

La proposition 5.11 permet d'obtenir la transformée de Laplace de $e^{\alpha t}$ lorsque $\alpha \in \mathbb{C}$: ainsi

$$\mathcal{L}_p(e^{\alpha t}) = \mathcal{L}_{p-\alpha}(1) = \frac{1}{p-\alpha} \quad \text{si } \Re p > \Re \alpha. \quad (5.15)$$

On déduit aisément à partir de là les transformées de Laplace des fonctions sinus et cosinus trigonométriques et hyperboliques. Si $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{L}_p[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{si } \Re p > 0, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{L}_p[\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{si } \Re p > 0, \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L}_p[\text{sh}(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \text{si } \Re p > |\omega|, \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}_p[\text{ch}(\omega t)] = \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad \text{si } \Re p > |\omega|. \quad (5.19)$$

Établissons par exemple les formules (5.16) et (5.19), les autres s'obtenant de manière analogue. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_p[\sin(\omega t)] &= \mathcal{L}_p\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) \\
 &= \frac{1}{2j} [\mathcal{L}_p(e^{j\omega t}) - \mathcal{L}_p(e^{-j\omega t})] \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right], \quad \text{si } \Re p > 0, \\
 &= \frac{1}{2j} \frac{(p + j\omega) - (p - j\omega)}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_p[\text{ch}(\omega t)] &= \mathcal{L}_p\left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} [\mathcal{L}_p(e^{\omega t}) + \mathcal{L}_p(e^{-\omega t})] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega} \right], \quad \text{si } \Re p > \omega \text{ et } \Re p > -\omega \\
 &= \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad \text{si } \Re p > |\omega|.
 \end{aligned}$$

5.2.5 Intégration et dérivation

Proposition 5.12 (Dérivabilité et comportement à l'infini). *Sous les conditions de la proposition 5.3, $\mathcal{L}_p f \in C_\infty(]r, +\infty[)$ et on a quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$,*

$$\frac{d^m}{dp^m} \mathcal{L}_p f = (-1)^m \mathcal{L}_p(t^m f), \quad \forall p > r.$$

En outre,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_p[f(t)] = 0.$$

Démonstration. Étudions cette propriété de la transformée de Laplace dans le cas où $p \in \mathbb{R}$.

La transformée de Laplace

$$\mathcal{L}_p f = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in]r, +\infty[$$

est une intégrale paramétrique dont la valeur dépend de la variable (ou du paramètre) p . Il résulte de la théorie des intégrales paramétriques que $\mathcal{L}_p f \in C_\infty(]r, +\infty[)$, ses dérivées s'obtenant en dérivant sous le signe d'intégration, si l'intégrant

$$e^{-pt} f(t) \in C_\infty(]r, +\infty[)$$

et si ses dérivées successives sont intégrables dans $]0, +\infty[$. Ces conditions sont réalisées dans le cas de $\mathcal{L}_p f$ puisque

$$\frac{d^m}{dp^m}(e^{-pt}f(t)) = (-1)^m e^{-pt} t^m f(t) \in L_1(]0, +\infty[),$$

car

$$|e^{-pt} t^m f(t)| \leq C t^m e^{-(\mathcal{R}p-r)t} \in L_1(]0, +\infty[).$$

On peut donc écrire²

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dp^m} \mathcal{L}_p f &= \int_0^{+\infty} \frac{d^m}{dp^m}(e^{-pt}f(t)) dt, \\ &= (-1)^m \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^m f(t) dt, \\ &= (-1)^m \mathcal{L}_p [t^m f(t)]. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$|\mathcal{L}_p f| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-pt}f(t)| dt \leq C \int_0^{+\infty} e^{-(\mathcal{R}p-r)t} dt = \frac{C}{\mathcal{R}p-r}$$

si $\mathcal{R}p > r$

$$|\mathcal{L}_p f| \leq \frac{C}{p-r}, \quad \forall p \in]r, +\infty[,$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_p f = 0.$$

□

Ces résultats restent vrais si $\mathcal{L}_p f$ est défini pour $p > r$, sans que f ne satisfasse aux conditions de la proposition 5.3.

Proposition 5.13 (Transformée de la dérivée d'un signal). *Si $f \in C_1(]0, +\infty[)$, si f admet une limite finie en 0^+ , notée $f(0^+)$ et si f est d'ordre exponentiel r en $+\infty$, alors*

$$\mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = p \mathcal{L}_p [f(t)] - f(0^+) \quad (5.20)$$

pour autant que $\mathcal{R}p > r$.

2. Plus précisément, la dérivation des intégrales paramétriques exige que les dérivées de l'intégrande soient majorées en module dans tout compact $K = [p_0, p_1] \subset]r, +\infty[$ par une fonction

$$g_K(x) \in L_1(]0, +\infty[).$$

C'est le cas puisque

$$\left| \frac{d^m}{dp^m}(e^{-pt}f(t)) \right| \leq t^m e^{-(p-r)t} \leq t^m e^{-(p_0-r)t}, \quad \forall p \in [p_0, p_1].$$

Démonstration. En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt, \\ &= [e^{-pt} f(t)]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-pt} f(t)) - \lim_{t \rightarrow 0^+} (e^{-pt} f(t)) + p \mathcal{L}_p[f(t)]\end{aligned}$$

pourvu que $\mathcal{R}p > r$. Comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-pt} f(t)) = 0 \quad \text{si } \mathcal{R}p > r,$$

on obtient finalement

$$\mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = p \mathcal{L}_p[f(t)] - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = p \mathcal{L}_p[f(t)] - f(0^+).$$

□

La proposition 5.13 s'étend naturellement aux dérivées d'ordre supérieur.

Proposition 5.14 (Transformée des dérivées d'ordre supérieur). *Si $f \in C_m(]0, +\infty[)$, si $\frac{d^k f}{dt^k}$ admet une limite finie en 0^+ , notée $\frac{d^k f}{dt^k}(0^+)$ et si $\frac{d^k f}{dt^k}$ est d'ordre exponentiel r en $+\infty$, $\forall k = 0, \dots, m-1$, alors*

$$\mathcal{L}_p \left[\frac{d^m f(t)}{dt^m} \right] = p^m \mathcal{L}_p[f(t)] - p^{m-1} f(0^+) - p^{m-2} \frac{df(0^+)}{dt} - \dots - \frac{d^{m-1} f(0^+)}{dt^{m-1}} \quad (5.21)$$

pourvu que $\mathcal{R}p > r$.

Démonstration. Établissons la formule (5.21) si $m = 2$, le cas général s'en déduisant de proche en proche. La fonction $\frac{df}{dt}$ satisfaisant aux conditions de la proposition 5.13, on peut écrire

$$\mathcal{L}_p \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = p \mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] - \frac{df(0^+)}{dt}$$

ou encore, en tenant compte de (5.20),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] &= p (p \mathcal{L}_p[f(t)] - f(0^+)) - \frac{df(0^+)}{dt} \\ &= p^2 \mathcal{L}_p[f(t)] - p f(0^+) - \frac{df(0^+)}{dt}.\end{aligned}$$

□

On déduit de la proposition 5.13 le théorème des valeurs initiale et finale. Pour les besoins de ce théorème, nous supposons que $p \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.15 (Théorème des valeurs initiale et finale). *Dans les conditions de la proposition 5.13, on a*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p\mathcal{L}_p[f(t)]. \quad (5.22)$$

Si, en outre, $f(t)$ admet une limite finie en $+\infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p\mathcal{L}_p[f(t)]. \quad (5.23)$$

Démonstration. D'après (5.20), on a

$$\mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = p\mathcal{L}_p[f(t)] - f(0^+), \quad \forall p > r.$$

Faisons tendre p vers $+\infty$: il vient

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \lim_{p \rightarrow +\infty} p\mathcal{L}_p[f(t)] - f(0^+),$$

d'où, comme le premier membre est nul, en vertu de la proposition 5.12,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p\mathcal{L}_p f = f(0^+),$$

c'est-à-dire (5.22).

Établissons (5.23). Si $f(t)$ admet une limite finie en $+\infty$, f est alors d'ordre exponentiel 0 en $+\infty$ et on a

$$\mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = p\mathcal{L}_p[f(t)] - f(0^+), \quad \forall p > 0;$$

d'où, en faisant tendre p vers 0,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \lim_{p \rightarrow 0^+} p\mathcal{L}_p f - f(0^+).$$

En observant que

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] &= \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt, \\ &= \int_0^{+\infty} \lim_{p \rightarrow 0} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt, \end{aligned}$$

le passage à la limite sous le signe d'intégration est justifié par le théorème de Lebesgue étant donné que

$$\left| e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} \right| \leq \left| \frac{df(t)}{dt} \right| \in L_1(]0, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] &= \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} dt, \\ &= [f(t)]_0^{+\infty}, \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0^+), \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \mathcal{L}_p[f(t)].$$

□

Proposition 5.16 (Primitivation de la transformée de Laplace). *Si f est continue par morceaux dans $[0, +\infty[$, d'ordre exponentiel r en $+\infty$ et si*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \neq \infty,$$

alors

$$\int_p^{+\infty} \mathcal{L}_s f ds = \mathcal{L}_p \left[\frac{f(t)}{t} \right], \quad \forall p > r.$$

Démonstration. La fonction $\frac{f(t)}{t}$ satisfait aux hypothèses de la proposition 5.3 : $\mathcal{L}_p \left[\frac{f(t)}{t} \right]$ est défini si $p > r$. Dès lors, la proposition 5.12 assure que

$$\frac{d}{dp} \mathcal{L}_p \left[\frac{f(t)}{t} \right] = -\mathcal{L}_p f, \quad \forall p > r.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_p^{+\infty} \mathcal{L}_s f ds &= - \int_p^{+\infty} \frac{d}{ds} \mathcal{L}_s \left[\frac{f(t)}{t} \right] ds, \\ &= - \left[\mathcal{L}_s \left(\frac{f(t)}{t} \right) \right]_{s=p}^{s=+\infty}, \\ &= \mathcal{L}_p \left[\frac{f(t)}{t} \right] \end{aligned}$$

puisque toute transformée de Laplace tend vers 0 en $+\infty$ en vertu de la proposition 5.12. □

Exemple 5.17. Calculons $\mathcal{L}_p \left[\frac{\sin t}{t} \right]$ sachant que $\mathcal{L}_p[\sin t] = \frac{1}{p^2+1} > 0$. Les hypothèses de la proposition 5.16 étant satisfaites puisque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p \left[\frac{\sin t}{t} \right] &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}_s(\sin t) ds = \int_p^{+\infty} \frac{1}{s^2+1} ds, \\ &= [\arctg s]_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg p \quad \text{si } p > 0. \end{aligned}$$

La proposition 5.16 ne permet par contre pas de calculer $\mathcal{L}_p \left[\frac{\cos t}{t} \right]$ car

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{t} = \infty.$$

D'ailleurs, cette transformée de Laplace n'est définie pour aucune valeur de p puisqu'au voisinage de 0,

$$e^{-pt} \frac{\cos t}{t} \sim \frac{1}{t} \notin L_1(]0, +\infty[).$$

5.2.6 Convolution dans le domaine temporel

Proposition 5.18 (Théorème de Borel). *Si $\mathcal{L}_p f$ et $\mathcal{L}_p g$ existent, alors*

$$\mathcal{L}_p(f \star g) = \mathcal{L}_p[f(t)] \mathcal{L}_p[g(t)]. \quad (5.24)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p[f(t)] \mathcal{L}_p[g(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \int_0^{+\infty} e^{-py} g(y) dy \\ &= \iint_{[0,+\infty[\times [0,+\infty[} e^{-p(x+y)} f(x)g(y) dx dy, \end{aligned}$$

en vertu du critère de Tonelli. Effectuons le changement de variables linéaire

$$\begin{cases} t = x + y \\ s = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t - s \end{cases}$$

qui transforme $E = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ en

$$E^* = \{(t, s) : t \geq s \geq 0\}.$$

Comme

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = 1,$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p[f(t)] \mathcal{L}_p[g(t)] &= \iint_{E^*} e^{-pt} f(s)g(t-s) dt ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \left(\int_0^t f(s)g(t-s) ds \right) \\ &= \mathcal{L}_p \left[\int_0^t f(s)g(t-s) ds \right] \\ &= \mathcal{L}_p(f \star g), \end{aligned}$$

en vertu de la formule (3.18). □

Le théorème de Borel permet de calculer la transformée de Laplace de la primitive d'une fonction.

Proposition 5.19 (Transformée d'une primitive). *Si $f \in C_0([0, +\infty[)$ et si f est d'ordre exponentiel r en $+\infty$, alors*

$$\mathcal{L}_p \left[\int_0^t f(s) ds \right] = \frac{1}{p} \mathcal{L}_p[f(t)] \quad (5.25)$$

si $\Re p > \max(r, 0)$.

Démonstration. De fait, comme

$$\int_0^t f(s) ds = (f \star 1)(t),$$

le théorème de Borel assure que

$$\mathcal{L}_p \left[\int_0^t f(s) ds \right] = \mathcal{L}_p[f(t)] \mathcal{L}_p 1 = \frac{1}{p} \mathcal{L}_p[f(t)]$$

pourvu que $\mathcal{L}_p[f(t)]$ et $\mathcal{L}_p 1$ existent, ce qui est le cas si $\Re p > \sup(r, 0)$. □

5.3 Transformée de Laplace de signaux usuels

Rappelons d'abord les propriétés de l'intégrale eulérienne de première espèce

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \quad n > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1), \quad \forall n > 1; \\ \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}; \end{aligned}$$

d'où en particulier si $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

La transformée de Laplace de t^m s'exprime en fonction de Γ .

Proposition 5.20 (Transformée de Laplace d'une puissance). *Si $m > -1$, on a*

$$\mathcal{L}_p[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}} \quad (5.26)$$

pourvu que $p \in \mathbb{R}_0^+$.

Démonstration. En posant $pt = x$ dans l'intégrale

$$\mathcal{L}_p[t^m] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^m dt,$$

il vient, si $p > 0$,

$$\mathcal{L}_p[t^m] = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{x^m}{p^m} \frac{dx}{p} = \frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}},$$

l'intégrale étant définie puisque $m+1 > 0$. □

La formule (5.26) permet de calculer

$$\mathcal{L}_p[\sqrt{t}] = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2p} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad (5.27)$$

$$\mathcal{L}_p\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad (5.28)$$

pourvu que $p > 0$.

Exemple 5.21. *Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, on a*

$$\mathcal{L}_p(at^2 + bt + c) = \frac{2a}{p^3} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p} \quad \text{si } \Re p > 0.$$

La théorie des distributions permet par ailleurs de donner un sens à la transformée de Laplace de la distribution de Dirac

$$\mathcal{L}_p[\delta(t)] = 1 \quad \text{si } \Re p > 0. \quad (5.29)$$

En effet, si on convient, comme dans le cadre de la transformée de Fourier, que

$$\mathcal{L}_p[\delta(t)] = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_p[f_m(t)],$$

avec

$$f_m(t) = m \operatorname{rect} \frac{1}{m}(t), \quad (5.30)$$

il vient, en vertu de (5.11), et pourvu que $\Re p > 0$,

$$\mathcal{L}_p[\delta(t)] = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m}{p} \left(e^{\frac{p}{2m}} - e^{-\frac{p}{2m}} \right)$$

ou encore, en posant $\varepsilon = \frac{1}{m}$,

$$\mathcal{L}_p[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{p\varepsilon}{2}} - e^{-\frac{p\varepsilon}{2}}}{p\varepsilon}.$$

Constatant l'indétermination, une application du théorème de l'Hospital conduit à

$$\mathcal{L}_p[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{p}{2} e^{\frac{p\varepsilon}{2}} + \frac{p}{2} e^{-\frac{p\varepsilon}{2}}}{p} = 1,$$

soit le résultat annoncé.

La démarche utilisée ci-dessus est purement intuitive. La transformée de Laplace de δ est liée à la suite f_m choisie pour la définir. Rien ne dit en effet que $\mathcal{L}_p \delta$ serait toujours égale à 1 si on adoptait une autre suite f_m . Une démonstration rigoureuse nécessiterait de passer par la théorie des distributions qui sort du cadre de ce cours.

5.4 Transformée de Laplace inverse

5.4.1 Définition

La définition de la transformée de Laplace inverse découle du théorème fondamental de la transformée de Laplace qui exprime qu'une fonction $f(t)$ définie dans le domaine temporel peut être retrouvée sous certaines conditions à partir de sa transformée de Laplace $F(p)$.

Proposition 5.22 (Théorème fondamental). *Soit $f(t)$ une fonction causale continûment dérivable par morceaux dans \mathbb{R} et d'ordre exponentiel r en $+\infty$.*

Si $F(p) = \mathcal{L}_p f$ et si $p = \sigma + j\omega$ avec $\sigma > r$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{pt} d\omega = f(t), \quad \forall t > 0 \in \operatorname{dom}_c f \quad (5.31)$$

et, dans le cas d'une discontinuité au point t ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{pt} d\omega = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)), \quad \forall t > 0 \notin \operatorname{dom}_c f. \quad (5.32)$$

Démonstration. On a

$$e^{-\sigma t} f(t) \in L_1(]0, +\infty[)$$

car, en se reportant à la démonstration de la proposition 5.3, on constate que

$$|f(t)e^{-\sigma t}| \leq C e^{-(\sigma-r)t}, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Il s'ensuit que la fonction

$$g(t) = e^{-\sigma t} f(t) \text{ ech}(t) \in L_1(\mathbb{R}).$$

La transformée de Fourier de g est définie si $\sigma > r$ et est donnée par

$$\mathcal{F}_\omega[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-\sigma t} f(t) \text{ ech}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p).$$

Comme g est intégrable et continûment dérivable par morceaux dans \mathbb{R} , le théorème de Fourier (cfr proposition 2.3) assure que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2}(g(t^-) + g(t^+)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si $t \geq 0$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))e^{-\sigma t}$$

ou encore, en multipliant les deux membres par $e^{\sigma t}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+));$$

d'où le résultat. □

Du théorème fondamental, on déduit que la transformée de Laplace est une application bijective.

Proposition 5.23 (Bijektivité de la transformée de Laplace). *Soient f et g des fonctions causales, continûment dérivables par morceaux dans \mathbb{R} et d'ordre exponentiel r en $+\infty$. Si*

$$\mathcal{L}_p f = \mathcal{L}_p g, \quad \forall p : \mathcal{R}p > r,$$

alors les fonctions f et g sont égales dans \mathbb{R} .

Démonstration. Soit $p = \sigma + j\omega$ avec $\sigma = \mathcal{R}p > r$ et $t \in \mathbb{R}$ un point où f et g sont continues.

D'après le théorème fondamental, on a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_p f e^{pt} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_p g e^{pt} d\omega = g(t).$$

□

Soit $f(t)$ une fonction causale, continûment dérivable par morceaux dans \mathbb{R} et d'ordre exponentiel r en $+\infty$. Si on pose

$$F(p) = \mathcal{L}_p[f(t)],$$

la fonction f est l'unique fonction dont la transformée de Laplace est $F(p)$: on dit que f est la transformée de Laplace inverse de F et on écrit

$$f(t) = \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)].$$

On a donc

$$f(t) = \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)] \Leftrightarrow F(p) = \mathcal{L}_p[f(t)]. \quad (5.33)$$

La détermination de la transformée de Laplace inverse d'une fonction $F(p)$ ne s'opère pas via la formule (5.31) car le calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{pt} d\omega$$

nécessite une connaissance approfondie de la théorie de l'intégration d'une fonction d'une variable complexe le long de courbes du plan complexe.

En pratique, on détermine la transformée de Laplace inverse à partir de formules découlant directement des propriétés de la transformée de Laplace.

5.4.2 Propriétés

Les propriétés de la transformée de Laplace inverse découlent directement des propriétés de la transformée de Laplace. On les établit en notant que

$$f(t) = g(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}_p f = \mathcal{L}_p g$$

et en utilisant la formule

$$\mathcal{L}_p \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)] = F(p). \quad (5.34)$$

Énonçons d'abord les principales règles de manipulation :

— combinaison linéaire

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(p) \right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathcal{L}_t^{-1}[F_i(p)], \quad (5.35)$$

— décalage fréquentiel

$$\mathcal{L}_t^{-1}[F(p - \alpha)] = e^{\alpha t} \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)], \quad (5.36)$$

— déphasage

$$\mathcal{L}_t^{-1}[e^{-pt_0} F(p)] = \text{ech}(t - t_0) \mathcal{L}_{t-t_0}^{-1}[F(p)], \quad (5.37)$$

— dérivation

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{d^m}{dp^m} F(p) \right] = (-1)^m t^m \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)], \quad (5.38)$$

— transformée inverse d'une primitive

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\int_p^{+\infty} F(s) ds \right] = \frac{1}{t} \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)], \quad (5.39)$$

— produit

$$\mathcal{L}_t^{-1}[F(p)G(p)] = \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)] \star \mathcal{L}_t^{-1}[G(p)], \quad (5.40)$$

— primitivation d'une transformée inverse

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{F(p)}{p} \right] = \int_0^t \mathcal{L}_s^{-1}[F(p)] ds. \quad (5.41)$$

On y ajoute les transformées inverses usuelles suivantes :

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^m} \right] = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \quad (5.42)$$

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^n} \right] = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad \forall n > 0, \quad (5.43)$$

$$\mathcal{L}_t^{-1}[1] = \delta(t), \quad (5.44)$$

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p - \alpha} \right] = e^{\alpha t}, \quad (5.45)$$

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right] = \sin(\omega t), \quad (5.46)$$

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{p}{p^2 + \omega^2} \right] = \cos(\omega t). \quad (5.47)$$

Établissons, à titre indicatif, la formule (5.36). Il s'agit donc de montrer que les transformées de Laplace des deux membres sont égales : on a successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{-1}[F(p - \alpha)] = e^{\alpha t} \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)] &\Leftrightarrow \mathcal{L}_p \mathcal{L}_t^{-1}[F(p - \alpha)] = \mathcal{L}_p [e^{\alpha t} \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)]] \\ &\Leftrightarrow F(p - \alpha) = \mathcal{L}_{p-\alpha} \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)] \end{aligned}$$

en vertu de (5.34) et (5.14). Cette dernière égalité est satisfaite d'après (5.34), ce qui établit (5.36).

5.4.3 Transformée inverse d'une fraction rationnelle

Dans les applications pratiques de la transformée de Laplace, notamment dans la résolution d'équations différentielles, on est souvent amené à calculer la transformée inverse d'une fraction rationnelle.

Soit

$$R(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

une fraction rationnelle propre réelle. On peut la décomposer en une somme de fractions simples du type

$$\frac{A}{(p - \alpha)^m} \quad \text{et} \quad \frac{Bp + C}{(p^2 + bp + c)^m}$$

où $m \in \mathbb{N}_0$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - 4c < 0$ de sorte que $\mathcal{L}_t^{-1}[R(p)]$ est la somme des transformées inverses de ces fractions simples.

D'une part,

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{(p - \alpha)^m} \right] = e^{\alpha t} \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^m} \right] = e^{\alpha t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$$

en vertu des formules (5.36) et (5.42).

D'autre part, afin de calculer

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{Bp + C}{(p^2 + bp + c)^m} \right],$$

écrivons d'abord le trinôme $p^2 + bp + c$ sous la forme d'une somme de carrés :

$$p^2 + bp + c = \left(p + \frac{b}{2} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(p + \frac{b}{2} \right)^2 + \omega^2$$

où $\omega^2 = c - \frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}(4c - b^2) > 0$.

On peut toujours écrire

$$Bp + C = B \left(p + \frac{b}{2} \right) + D, \quad \text{avec } D = C - B \frac{b}{2}$$

de sorte que

$$\frac{Bp + C}{(p^2 + bp + c)^m} = B \frac{p + \frac{b}{2}}{\left[\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 + \omega^2 \right]^m} + D \frac{1}{\left[\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 + \omega^2 \right]^m}.$$

En utilisant (5.35) et (5.36), on obtient

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{Bp + C}{(p^2 + bp + c)^m} \right] = B e^{-\frac{b}{2}t} \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^m} \right] + D e^{-\frac{b}{2}t} \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^m} \right].$$

Il n'existe pas de formule générale donnant l'expression des transformées inverses du second membre qui soit valable quel que soit m . On peut cependant les calculer de proche en proche. Ainsi, pour $m = 1$, on a

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{p}{p^2 + \omega^2} \right] = \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^2 + \omega^2} \right] = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}.$$

Si $m = 2$, montrons que

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega} \tag{5.48}$$

et

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{1}{2\omega^3} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)]. \tag{5.49}$$

Etablissons la relation (5.48) en utilisant (5.40) : il vient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} \right] &= \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^2 + \omega^2} \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right] \\
 &= \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \star \cos(\omega t) \\
 &= \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega s) \cos[\omega(t-s)] ds \\
 &= \frac{1}{2\omega} \int_0^t [\sin(\omega t) + \sin(2\omega s - \omega t)] ds \\
 &= \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega} - \frac{1}{4\omega^2} [\cos(2\omega s - \omega t)]_0^t \\
 &= \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega} - \frac{1}{4\omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(-\omega t)] \\
 &= \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega}.
 \end{aligned}$$

On peut également obtenir (5.48) en utilisant (5.38) : ainsi, de

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^2 + \omega^2} \right] = \frac{\sin(\omega t)}{\omega},$$

on déduit

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{-2p}{(p^2 + \omega^2)^2} \right] = -\frac{t \sin(\omega t)}{\omega},$$

d'où le résultat.

La relation (5.49) se déduit de (5.48) en utilisant (5.41) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \right] &= \int_0^t \mathcal{L}_s^{-1} \left[\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} \right] ds, \\
 &= \int_0^t \frac{s \sin(\omega s)}{2\omega} ds, \\
 &= -\frac{1}{2\omega^2} [s \cos(\omega s)]_0^t + \frac{1}{2\omega^2} \int_0^t \cos(\omega s) ds, \\
 &= -\frac{1}{2\omega^2} t \cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega^3} \sin(\omega t), \\
 &= \frac{1}{2\omega^3} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)].
 \end{aligned}$$

On peut également obtenir (5.49) en observant que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \right] &= \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{p^2 + \omega^2} \right], \\
 &= \frac{1}{\omega^2} (\sin(\omega t) \star \sin(\omega t))
 \end{aligned}$$

mais les calculs s'avèrent plus longs.

Exemple 5.24. *Calculons*

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^3 + 1} \right].$$

Décomposons d'abord la fraction rationnelle en une somme de fractions simples :

$$\frac{1}{p^3 + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{p + 1} - \frac{1}{3} \frac{p - 2}{p^2 - p + 1}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^3 + 1} \right] = \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{p - 2}{p^2 - p + 1} \right].$$

Afin de calculer cette dernière transformée inverse, écrivons

$$p^2 - p + 1 = \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

et

$$\frac{p - 2}{p^2 - p + 1} = \frac{p - \frac{1}{2}}{\left(p - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} - \frac{\frac{3}{2}}{\left(p - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{p - 2}{p^2 - p + 1} \right] &= e^{\frac{t}{2}} \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{p}{p^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right] - \frac{3}{2} e^{\frac{t}{2}} \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right], \\ &= e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{3}{2} e^{\frac{t}{2}} \frac{\sin \frac{\sqrt{3}t}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{1}{p^3 + 1} \right] = \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}t}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right).$$

5.5 Équations différentielles

La transformée de Laplace peut être utilisée entre autres pour résoudre des équations différentielles, des équations intégrales et des systèmes d'équations différentielles.

Nous nous limiterons dans ce chapitre à la résolution d'*équations différentielles linéaires à coefficients constants* pour l'importance qu'elles revêtent dans de nombreuses disciplines scientifiques, mais la méthode de résolution développée s'étend aux équations différentielles linéaires à coefficients variables.

Considérons l'équation différentielle

$$a_n \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = g(t) \quad (5.50)$$

où les coefficients a_i sont des constantes complexes ($a_n \neq 0$) et où $g(t)$ est une fonction donnée.

La solution générale $f(t)$ de l'équation (5.50) dépend de n constantes arbitraires. Celles-ci peuvent être déterminées si la fonction inconnue $f(t)$ est soumise à des conditions initiales du type

$$f(0) = \alpha_0, \quad \frac{df(0)}{dt} = \alpha_1, \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}f(0)}{dt^{n-1}} = \alpha_{n-1}.$$

Dans ce cas, l'équation (5.50) admet une solution unique. Il s'agit d'un problème de Cauchy.

Afin de résoudre l'équation (5.50), on procède comme suit :

1. on prend la transformée de Laplace des deux membres de (5.50) ;
2. en posant $F(p) = \mathcal{L}_p f$, on obtient une équation algébrique du premier degré que l'on résout sans difficulté ;
3. la solution de (5.50) est alors $f(t) = \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)]$.

Illustrons cette méthode de résolution à travers trois exemples.

Exemple 5.25. Résoudre

$$\frac{df(t)}{dt} + af(t) = 0, \quad f(0) = k. \quad (5.51)$$

Prenons la transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle. Si $F(p) = \mathcal{L}_p f$, on a

$$\mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = pF(p) - f(0^+) = pF(p) - k$$

de sorte que

$$pF(p) - k + aF(p) = 0 \Leftrightarrow F(p) = \frac{k}{p+a}.$$

La solution $f(t)$ de (5.51) est donnée par

$$f(t) = \mathcal{L}_t^{-1} \left(\frac{k}{p+a} \right) = ke^{-at}.$$

Exemple 5.26. Résoudre

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 6\frac{df(t)}{dt} + 9f(t) = 9e^{3t}, \quad f(0) = \frac{df(0)}{dt} = 0. \quad (5.52)$$

En observant que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p \left[\frac{df(t)}{dt} \right] &= p\mathcal{L}_p[f(t)] - f(0^+) = pF(p), \\ \mathcal{L}_p \left[\frac{d^2f(t)}{dt^2} \right] &= p^2\mathcal{L}_p[f(t)] - pf(0^+) - \frac{df(0^+)}{dt} = p^2F(p) \end{aligned}$$

et en prenant la transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle, il vient

$$p^2F(p) + 6pF(p) + 9F(p) = \frac{9}{p-3};$$

d'où

$$F(p) = \frac{9}{(p-3)(p+3)^2}.$$

La solution de (5.52) est donc donnée par

$$f(t) = \mathcal{L}_t^{-1} \left[\frac{9}{(p-3)(p+3)^2} \right].$$

Comme

$$\frac{9}{(p-3)(p+3)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{p-3} - \frac{1}{4} \frac{1}{p+3} - \frac{3}{2} \frac{1}{(p+3)^2},$$

on a finalement

$$f(t) = \frac{1}{4} e^{3t} - \frac{1}{4} e^{-3t} - \frac{3}{2} t e^{-3t}.$$

Exemple 5.27. Résoudre

$$f''(t) + 9f(t) = \cos(2t), \quad f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Il ne s'agit pas d'un problème de Cauchy mais d'un problème aux limites. Comme $\frac{df(0)}{dt}$ n'est pas donné, posons cette valeur égale à C . Il vient successivement

$$\mathcal{L}_p \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] + 9\mathcal{L}_p[f(t)] = \mathcal{L}_p[\cos(2t)],$$

soit, en posant $F(p) = \mathcal{L}_p[f(t)]$,

$$p^2 F(p) - pf(0^+) - \frac{df(0^+)}{dt} + 9F(p) = \frac{p}{p^2 + 4},$$

c'est-à-dire

$$(p^2 + 9)F(p) - p - C = \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Cette équation admet la solution

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p+C}{p^2+9} + \frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)}, \\ &= \frac{4}{5} \frac{p}{p^2+9} + \frac{C}{p^2+9} + \frac{1}{5} \frac{p}{p^2+4}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$f(t) = \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)] = \frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{C}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \cos(2t).$$

On détermine la constante C en imposant $f(\frac{\pi}{2}) = -1$ de sorte que

$$-1 = -\frac{C}{3} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow C = \frac{12}{5}.$$

Ainsi,

$$f(t) = \frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{4}{5} \sin(3t) + \frac{1}{5} \cos(2t).$$

5.6 Exercices

Par souci de clarté, nous avons proposé la solution de chaque exercice à côté de son énoncé.

- 1) Déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes en précisant les valeurs de p pour lesquelles cette transformée existe.

a) $2e^{4t}$	$\left[\frac{2}{p-4}, \mathcal{R}p > 4 \right];$
b) $2t^2 - e^{-t}$	$\left[\frac{-p^3+4p+4}{p^3(p+1)}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
c) $6 \sin 2t - 5 \cos 2t$	$\left[\frac{-5p+12}{p^2+4}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
d) $(t^2 + 1)^2$	$\left[\frac{p^4+4p^2+24}{p^5}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
e) $(\sin t - \cos t)^2$	$\left[\frac{p^2-2p+4}{p(p^2+4)}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
f) $4 \cos^2 2t$	$\left[\frac{4(p^2+8)}{p(p^2+16)}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
g) $(t - 1)^3$	$\left[\frac{-p^3+3p^2-6p+6}{p^4}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
h) $(t - 1)^3 u(t - 1)$	$\left[\frac{6e^{-p}}{p^4}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
i) $t^3 e^{-3t}$	$\left[\frac{6}{(p+3)^4}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
j) $e^{-t} \cos 2t$	$\left[\frac{p+1}{p^2+2p+5}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
k) $2e^{3t} \sin 4t$	$\left[\frac{8}{p^2-6p+25}, \mathcal{R}p > 3 \right];$
l) $e^{2t}(3 \sin 4t - 4 \cos 4t)$	$\left[\frac{-4p+20}{p^2-4p+20}, \mathcal{R}p > 2 \right];$
m) $e^{-4t} \operatorname{ch} 2t$	$\left[\frac{p+4}{p^2+8p+12}, \mathcal{R}p > 2 \right];$

n)	$e^{-t} \sin^2 t$	$\left[\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+5)}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
o)	$t \operatorname{sh} 2t$	$\left[\frac{4p}{(p^2-4)^2}, \mathcal{R}p > 2 \right];$
p)	$(1 + te^{-t})^3$	$\left[\frac{1}{p} + \frac{3}{(p+1)^2} + \frac{6}{(p+2)^3} + \frac{6}{(p+3)^4}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
q)	$t \sin(\omega t)$	$\left[\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
r)	$t^2 \cos(\omega t)$	$\left[\frac{2p(p^2-3\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^3}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
s)	$t^3 \cos t$	$\left[\frac{6(p^4-6p^2+1)}{(p^2+1)^4}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
t)	$\frac{e^{-at}-e^{-bp}}{t}$	$\left[\ln \frac{p+b}{p+a}, p > \max(-a, -b) \right];$
u)	$\frac{1-\cos(\omega t)}{t}$	$\left[\ln \frac{\sqrt{p^2+\omega^2}}{p}, p > 0 \right];$
v)	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\left[\frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2+\omega^2}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
w)	$\operatorname{sh} \omega t \sin(\omega t)$	$\left[\frac{2\omega^2 p}{p^4+4\omega^4}, \mathcal{R}p > \omega \right];$
x)	$\cos(\omega t) \operatorname{ch} \omega t$	$\left[\frac{p^3}{p^4+4\omega^4}, \mathcal{R}p > \omega \right];$
y)	$\sin \alpha t \cos \beta t$	$\left[\frac{\alpha(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{p^4+2(\alpha^2+\beta^2)p^2+(\alpha^2-\beta^2)^2}, \mathcal{R}p > 0 \right];$
z)	$\int_0^t \frac{\sin s}{s} ds$	$\left[\frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right), p > 0 \right];$

En déduire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin s}{s} ds \quad \left[\frac{\pi}{2} \right].$$

2) Vérifier le théorème des valeurs initiale et finale pour les fonctions

a) $f(t) = t^3 e^{-2t}$,

b) $f(t) = e^{-t} \cos t$.

3) Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

a)	$\frac{1}{2p-5}$	$\left[\frac{1}{2} e^{\frac{5t}{2}} \right];$
b)	$\frac{8p}{p^2+16}$	$[8 \cos 4t];$
c)	$\frac{6}{p^2+4}$	$[3 \sin 2t];$
d)	$\frac{3p-12}{p^2+8}$	$[3 \cos 2\sqrt{2}t - 3\sqrt{2} \sin 2\sqrt{2}t];$
e)	$\frac{(\sqrt{p}-1)^2}{p}$	$\left[1 + \delta - \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \right];$
f)	$\frac{5p+4}{p^3} + \frac{24-30\sqrt{p}}{p^4}$	$\left[5t + 2t^2 + 4t^3 - \frac{16}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t^5} \right];$
g)	$\frac{11}{\sqrt{2p+3}}$	$\left[\frac{11}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{3t}{2}}}{\sqrt{t}} \right];$
h)	$\frac{e^{-5p}}{(p-2)^4}$	$\left[\frac{1}{6e^{10}} e^{2t} (t-5)^3 u(t-5) \right];$
i)	$\frac{8p+20}{p^2-12p+32}$	$[21e^{8t} - 13e^{4t}];$
j)	$\frac{3p-2}{p^2-4p+20}$	$[e^{2t} (3 \cos 4t + \sin 4t)];$
k)	$\frac{p+1}{p^2+p+1}$	$\left[e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right];$
l)	$\frac{pe^{-2p}}{p^2+3p+2}$	$[(2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)})u(t-2)];$

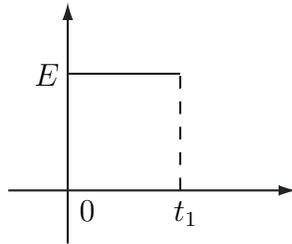
- m) $\frac{e^{-3p}}{p^2-2p+5}$ $\left[\frac{1}{2} e^{t-3} \sin 2(t-3)u(t-3) \right];$
- n) $\frac{1}{p^3(p^2+4)}$ $\left[\frac{2t^2-1+\cos 2t}{16} \right];$
- o) $\frac{1}{p^2(p+1)^2}$ $[(t+2)e^{-t} + t - 2];$
- p) $\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-2)(p-3)}$ $\left[\frac{1}{6}(21e^{3t} - 8e^{2t} - e^{-t}) \right];$
- q) $\frac{p-1}{p^2+4p+5}$ $[e^{-2t}(\cos t - 3 \sin t)];$
- r) $\frac{2p-1}{p^2+p+2}$ $\left[2e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{7}}{2} t - \frac{2}{\sqrt{7}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \right) \right];$
- s) $\frac{1}{(p-a)(p-b)}, \quad a \neq b$ $\left[\frac{e^{at}-e^{-bt}}{a-b} \right];$
- t) $\frac{1}{(p^2-a^2)^2}$ $\left[\frac{1}{2a^3}(at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at) \right];$
- u) $\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}, \quad a \neq \pm b$ $\left[\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt) \right];$
- v) $\frac{p}{p^3-8}$ $\left[\frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{6} e^{-t}(\cos \sqrt{3}t - \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t) \right];$
- w) $\frac{p^2}{p^3+a^3}, \quad a \neq 0$ $\left[\frac{1}{3} \left(e^{-at} + 2e^{\frac{at}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}at}{2} \right) \right];$
- x) $\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad \omega \neq 0$ $\left[\frac{1}{2\omega}(\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t)) \right];$
- y) $\frac{1}{(p^2+\omega^2)^3}, \quad \omega \neq 0$ $\left[\frac{(3-\omega^2 t^2) \sin(\omega t) - 3\omega t \cos(\omega t)}{8\omega^5} \right];$
- z) $\frac{p}{(p^2+\omega^2)^3}, \quad \omega \neq 0$ $\left[\frac{t \sin(\omega t) - \omega t^2 \cos(\omega t)}{8\omega^3} \right].$

4) Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la transformée de Laplace

$$\text{a) } y' + ay = e^{-2t} \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{a-2}(e^{-2t} - e^{-at}) + C & \text{si } a \neq 2 \\ e^{-2t}(t + C) & \text{si } a = 2 \end{array} \right];$$

$$\text{b) } y' + y = t \sin t, y(0) = 0 \quad \left[\frac{1}{2} \cos t + \frac{t}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2} e^{-t} \right];$$

$$\text{c) } L \frac{di}{dt} + Ri = e(t), i(0) = 0 \quad \left[i(t) = \begin{cases} \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) & \text{pour } 0 \leq t < t_1 \\ \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}(e^{\frac{R}{L}t_1} - 1) & \text{pour } t \geq t_1 \end{cases} \right];$$



$$e(t) = E[\text{ech} - u(t - t_1)];$$

$$\text{d) } y'' + 4y = \sin 2t, \quad \left[\frac{1}{8}(4b + 1) \sin 2t - \frac{t}{4} \cos 2t \right];$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = b$$

$$\text{e) } y'' + 3y' + 2y = 0, \quad [e^{-t} - e^{-2t}];$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$\text{f) } y'' - 3y' + 2y = 4t + 12e^{-t}, \quad [3e^t - 2e^{2t} + 2t + 3 + 2e^{-t}];$$

$$y(0) = 6, \quad y'(0) = -1$$

$$\text{g) } y'' - 4y' + 5y = te^t, \quad \left[\frac{1}{2} e^t(t + 1) - \frac{1}{2} e^{2t} \cos t \right];$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$\text{h) } y''' + y' = e^{2t}, \quad \left[\frac{1}{10}(e^{2t} - 2 \sin t + 4 \cos t - 5) \right];$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

$$\begin{array}{l}
 \text{i) } y'' + \omega^2 y = a \cos \omega_0 t, \\
 y(0) = y'(0) = 0 \\
 \text{j) } y'' + \omega^2 y = a \sin \omega_0 t, \\
 y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \\
 \text{k) } y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin 2t, \\
 y(0) = 1, \quad y'(0) = 0
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 \omega \neq \omega_0 : \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos(\omega t)) \\
 \omega = \omega_0 : \frac{at - \sin \omega_0 t}{2\omega_0} \\
 \omega \neq \omega_0 : \frac{1}{\omega} \left[\sin \omega t + \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} (\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin(\omega t)) \right] \\
 -\omega = \omega_0 : \frac{(2\omega_0 + a) \sin \omega_0 t - a \omega_0 t \cos \omega_0 t}{2\omega_0^2}
 \end{array} \right];$$

$$\begin{array}{l}
 \text{l) } y^{(4)}(t) - 16y(t) = 30 \sin t, \quad [2(\sin 2t - \sin t)]. \\
 y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \\
 y''(\pi) = 0, \quad y'''(\pi) = -18
 \end{array}$$

5) Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la transformée de Laplace :

$$\text{a) } ty'' + (1-t)y' = t - 1, \quad [-t + k]; \\
 y(0) = k$$

$$\text{b) } y'' + ty' - y = 0, \quad [t]; \\
 y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$\text{c) } ty'' + (t-1)y' - y = 0, \quad [5e^{-t}]. \\
 y(0) = 5, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

(N.B. : Utiliser le théorème des valeurs initiale et finale dans la résolution des exercices b) et c.)

6) Résoudre les équations suivantes en prenant la transformée de Laplace des deux membres :

$$\text{a) } -t^2 = -y(t) + \int_0^t y(s) \sin(t-s) ds, \quad \left[t^2 + \frac{t^4}{12} \right];$$

$$\text{b) } 3 + 4t = \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\frac{1}{4}}} ds, \quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi} t^{-\frac{3}{4}} (3 + 16t) \right];$$

(N.B. : On admet que $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ si $0 < n < 1$.)

$$\text{c) } y' + 5 \int_0^t y(s) \cos 2(t-s) ds = 10, \quad \left[\frac{10}{9} \left(4t + \frac{5}{3} \sin 3t \right) \right]. \\
 y(0) = 0$$

Bibliographie

- [1] Jean ETIENNE. *Analyse Mathématique (à l'usage Des Candidatures Ingénieur et Informatique)*. Notes de cours. 2 t. Université de Liège, 1997.
- [2] F.-X. LITT. *Analyse Numérique I*. Notes de cours. Université de Liège, 1999.
- [3] Pierre LOUSBERG. *Analyse avancée*. Notes de cours. Mathématiques au service de l'ingénieur 3. Liège : Derouaux, 2009.
- [4] Pierre LOUSBERG. *Analyse de base*. Notes de cours. 2 t. Mathématiques au service de l'ingénieur 2. Liège : Derouaux, 2009.
- [5] Pierre LOUSBERG. *Analyse numérique*. Notes de cours. Mathématiques au service de l'ingénieur 5. Liège : Derouaux, 2009. 223 p.
- [6] Alfio QUARTERONI, Paola GERVASIO et Fausto SALERI. *Calcul Scientifique*. Milano : Springer Milan, 2010. ISBN : 978-88-470-1675-0 978-88-470-1676-7.
- [7] L. F. SHAMPINE, R. C. ALLEN et S. PRUESS. *Fundamentals of Numerical Computing*. New York : John Wiley & Sons, 1997. 277 p. ISBN : 0-471-16363-5.
- [8] J. STOER et R. BULIRSCH. *Introduction to Numerical Analysis*. 3^e éd. Texts in Applied Mathematics 12. New York : Springer-Verlag, 2002.