Examen Juin 2023

Question I — 35 %

Dans le système illustré à la Figure 1, on s'intéresse à la position $y(t)$ de la masse m en fonction de la position $x(t)$ de la plaque. On peut démontrer que ce système d'entrée $x(t)$ et de réponse $y(t)$ est causal linéaire temps invariant et caractérisé par la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \mathrm{e}^{-t} \sin t \, u(t) \quad \text{où} \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

1. Esquisser le graphique de $h(t)$. Celui-ci est-il en accord avec le comportement attendu du système ? Commenter.
2. Déterminer sa réponse indicielle et esquisser son graphique. Celui-ci est-il en accord avec le comportement attendu du système ? Commenter.
3. Vérifier par le calcul que la réponse impulsionnelle est égale à la dérivée de la réponse indicielle.
4. La position de la plaque est définie par

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0, 1] \end{cases}$$

   (a) Calculer (au sens des distributions) la vitesse $v(t)$ de la plaque et tracer les graphiques de $x(t)$ et $v(t)$.

   (b) Déterminer la position $y(t)$ de la masse pour tout $t \in \mathbb{R}$.

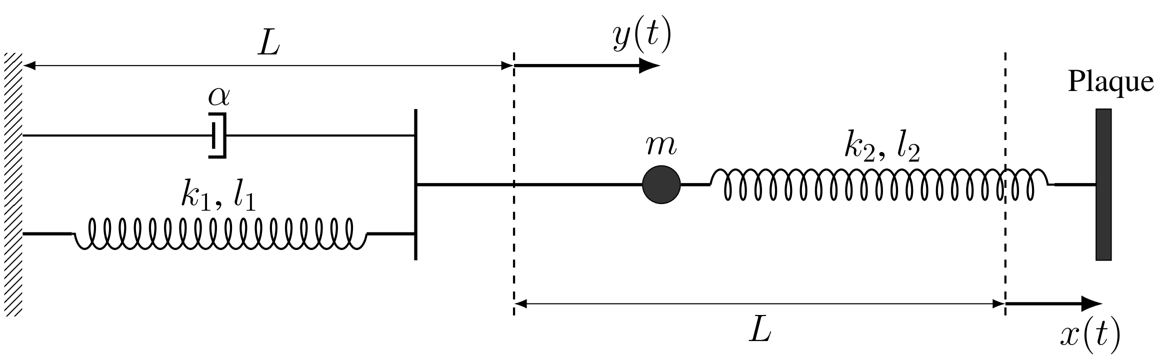


FIGURE 1 – Illustration du système mécanique. La masse m est reliée par un premier ressort et un amortisseur à un mur fixe et par un second ressort à une plaque mobile. Les valeurs des paramètres sont fixées à $m = 1$ kg, $k_1 = k_2 = 1$ N/m, $l_1 = l_2$, $\alpha = 2$ Ns/m.

Question II **35%**

On considère le système illustré à la Figure 1 dont la fonction de tranfert est

$$H(\omega) = \frac{1}{[1 + \mathrm{j}\ (\omega - 1)]\ [1 + \mathrm{j}\ (\omega + 1)]}.$$

On impose à l'entrée un signal périodique $x(t)$ de période $T = 2$ et de fonction motif

$$x_{\text{motif}}(t) = \operatorname{ch} t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \quad \text{pour} \quad t \in [-1, 1].$$

1. Esquisser le graphique de $x(t)$.
2. Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de tranfert.
3. Déterminer la sortie $y(t)$ du système en l'exprimant sous la forme
   (a) d'une série de Fourier,
   (b) d'une série de Fourier en sinus et cosinus.

Question III **30%**

Le système illustré sur la Figure 1 peut être modélisé par l'équation différentielle

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 2\,y(t) = x(t).$$

Utiliser les transformées de Laplace pour résoudre cette équation dans le cas où

$$x(t) = L\,u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ L & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

en tenant compte des conditions initiales

$$y(0) = \frac{L}{2} \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$

FORMULES

Primitives

$$\int \mathrm{e}^{-v}\ \cos v\, dv = -\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-v}\ (\cos v - \sin v) + C$$

$$\int \mathrm{e}^{-v}\ \sin v\, dv = -\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-v}\ (\cos v + \sin v) + C$$

$$\int v\ \mathrm{e}^{-v}\ \cos v\, dv = -\frac{1}{2}\, v\ \mathrm{e}^{-v}\ (\cos v - \sin v) + \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-v}\ \sin v + C$$

$$\int v\ \mathrm{e}^{-v}\ \sin v\, dv = -\frac{1}{2}\, v\ \mathrm{e}^{-v}\ (\cos v + \sin v) - \frac{1}{2}\, e^{-v}\ \cos v + C$$

Séries de Fourier d'une fonction périodique de période T

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\, k\, \frac{2\pi}{T}\, t}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, k\, \frac{2\pi}{T}\, t}\ dt$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\ \cos\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\ \sin\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right)$$

$$a_0 = 2\,\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right)\ dt$$

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right)\ dt$$

$$b_k = \mathrm{j}\ (\alpha_k - \alpha_{-k}) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \sin\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right)\ dt$$

Transformées de Laplace

$$\mathcal{L}_p\left[\mathrm{e}^{-a\,t}\ u(t)\right] = \frac{1}{p+a}$$

$$\mathcal{L}_p\left[\mathrm{e}^{-a\,t}\ \cos(\omega\,t)\,u(t)\right] = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$$

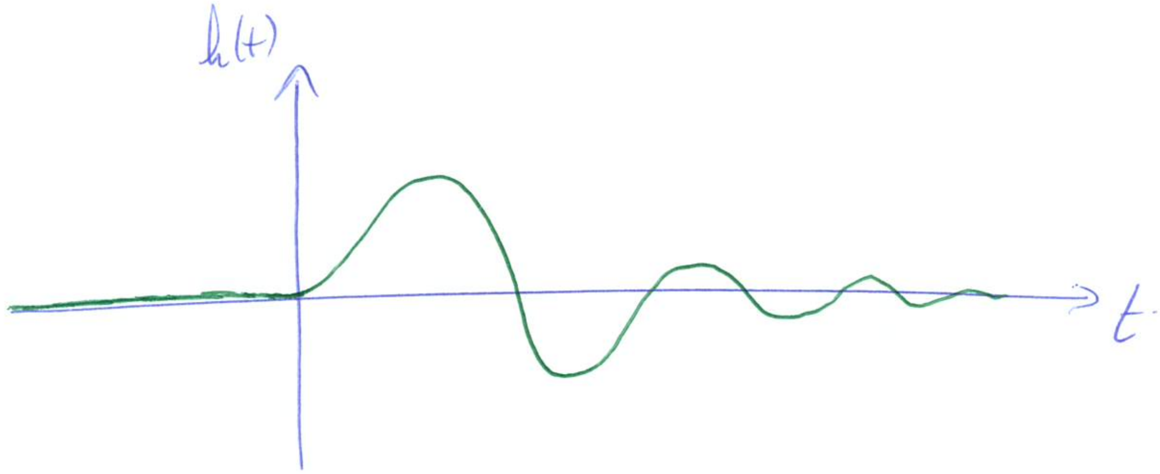
$$\mathcal{L}_p\left[\mathrm{e}^{-a\,t}\ \sin(\omega\,t)\,u(t)\right] = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}_p\left[y'(t)\right] = p\,Y(p) - y(0)$$

$$\mathcal{L}_p\left[y''(t)\right] = p^2\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0)$$

QUESTION I

1) $$h(t) = e^{-t} \sin t \cdot u(t)$$



2) $$y_u(t) = S\big(u(t)\big) = (u * h)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau)\, d\tau \cdot u(t)$$

$$= -\int_t^0 e^{-v} \sin v \, dv \cdot u(t)$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-v} \sin(v) - \frac{1}{2} e^{-v} \cos(v)\right]_0^t \cdot u(t)$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t)\right] u(t)$$

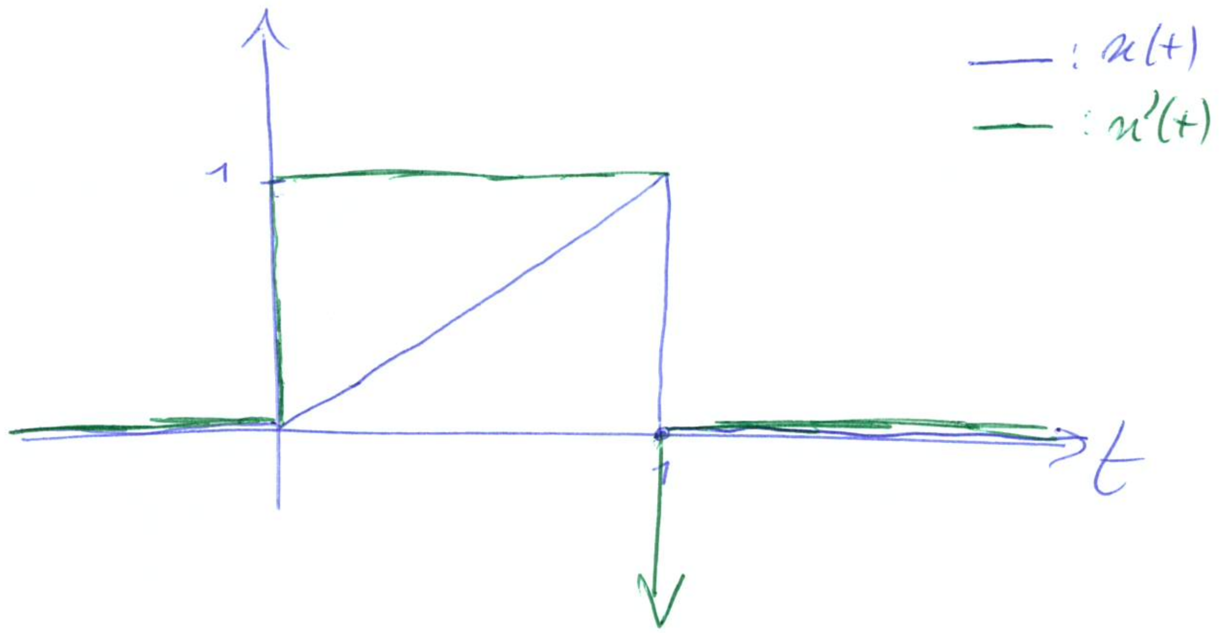
3) $$y_u'(t) = \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)\,u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t - \sin t)\,u(t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)\right)\delta(t)$$

$$= e^{-t}\sin t\,u(t) + 0.\delta(t) = h(t)$$

4) a) $$x(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big)$$

$$x'(t) = u(t) - u(t-1) + t\big(\delta(t) - \delta(t-1)\big)$$

$$= u(t) - u(t-1) - 1.\,\delta(t-1)$$



4) b) $x(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0,1] \end{cases}$

$$y(t) = (x * h)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau)\, d\tau$$

① Si $t < 1$:

$$y(t) = 0$$

② Si $t \in [0,1]$:

$$y(t) = \int_0^t \tau\, e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau)\, d\tau$$

Posons $\left| \begin{array}{l} v = t-\tau \\ dv = -d\tau \end{array} \right.$

$$= -\int_t^0 (t-v)\, e^{-v} \sin v\, dv$$

$$= -\int_0^t v e^{-v} \sin v \, dv + t \int_0^t e^{-v} \sin v \, dv$$

$$= -\left[-\frac{1}{2} v e^{-v} (\cos v + \sin v) - \frac{1}{2} e^{-v} \cos v \right]_0^t$$

$$+ t \left[-\frac{1}{2} e^{-v} (\cos v + \sin v) \right]_0^t$$

$$= +\frac{1}{2} t e^{-t} (\cos t + \sin t) + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t - \frac{1}{2}$$

$$+ t \left(-\frac{1}{2} e^{-t} (\cos t + \sin t) + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{(t-1)}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t$$

3° $\underline{\text{Si } t > 1}$:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) \, d\tau$$

$$= \int_0^1 \tau \, e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) \, d\tau$$

$$+ \int_1^t 0 \cdot e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) \, d\tau$$

$$= \int_0^1 \tau\, e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau)\, d\tau$$

$$= -\int_t^{t-1} (t-v)\, e^{-v} \sin v\, dv$$

$$= t \int_{t-1}^{t} e^{-v} \sin v\, dv - \int_{t-1}^{t} v e^{-v} \sin v\, dv$$

$$= t \left[-\frac{1}{2} e^{-v} (\cos v + \sin v) \right]_{t-1}^{t}$$

$$- \left[-\frac{1}{2} v e^{-v} (\cos v + \sin v) - \frac{1}{2} e^{-v} \cos v \right]_{t-1}^{t}$$

$$= -\frac{t}{2} e^{-t} (\cos t + \sin t) + \frac{t}{2} e^{-(t-1)} \left(\cos(t-1) + \sin(t-1) \right)$$

$$+ \frac{1}{2} t e^{-t} (\cos t + \sin t) + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t$$

$$- \frac{1}{2} (t-1) e^{-(t-1)} \left(\cos(t-1) + \sin(t-1) \right) - \frac{1}{2} e^{-(t-1)} \cos(t-1)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} \cos t + \frac{1}{2} e^{-(t-1)} \sin(t-1)$$

Donc :

$$y(t) = \left(\frac{t-1}{2}\right)\Big(u(t) - u(t-1)\Big) + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t\, u(t)$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin(t-1)\,u(t-1)$$

5/ $$y'(t) = \frac{1}{2}\Big(u(t) - u(t-1)\Big) + \left(\frac{t-1}{2}\right)\Big(\delta(t) - \delta(t-1)\Big)$$
$$- \frac{1}{2}e^{-t}\cos t\,u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t\,u(t)$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-t}\cos t\;\delta(t)$$
$$- \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin(t-1)\,u(t-1)$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\cos(t-1)\,u(t-1)$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin(t-1)\,\delta(t-1)$$

Ne fait plus Partie de l'énoncé !!

$$= \frac{1}{2}\Big(u(t) - u(t-1)\Big) \cancel{- \frac{1}{2}\delta(t)}$$
$$- \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t + \sin t)\,u(t) \cancel{+ \frac{1}{2}\delta(t)}$$
$$- \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\Big(\cos(t-1) - \sin(t-1)\Big)u(t-1)$$

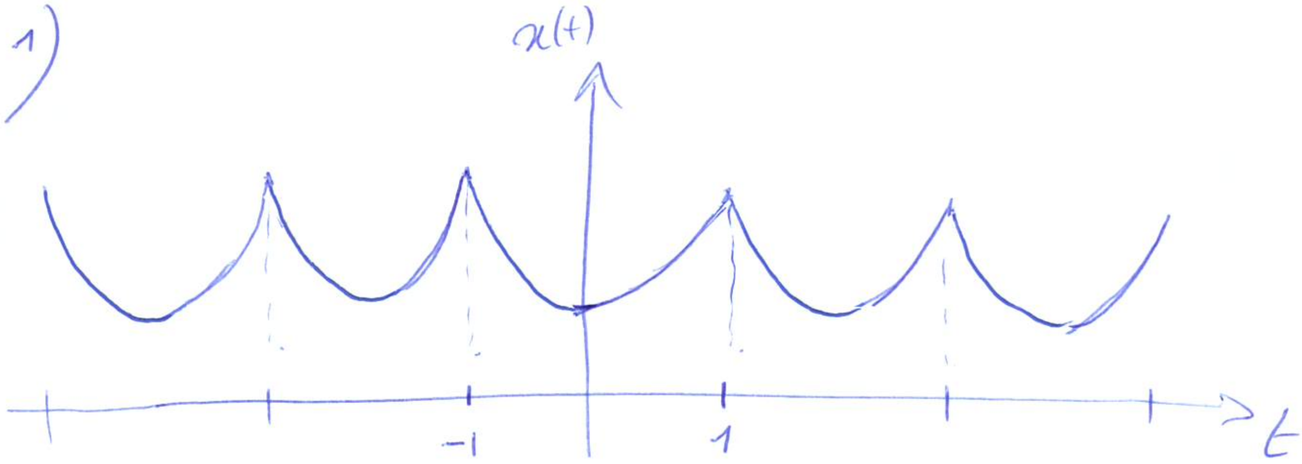
$$y''(t) = \cancel{\frac{1}{2}\delta(t)} - \frac{1}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t + \sin t)u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}(-\sin t + \cos t)\,u(t)$$
$$\cancel{- \frac{1}{2}\delta(t)} + \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\Big(\cos(t-1) - \sin(t-1)\Big)u(t-1) - \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\Big(-\sin(t-1) - \cos(t-1)\Big)u(t-1)$$
$$- \frac{1}{2}\delta(t-1)$$

QUESTION II

$$H(\omega) = \frac{1}{\left(1+j(\omega-1)\right)\left(1+j(\omega+1)\right)}$$

$$x_{motif}(t) = ch(t) = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$$

1)

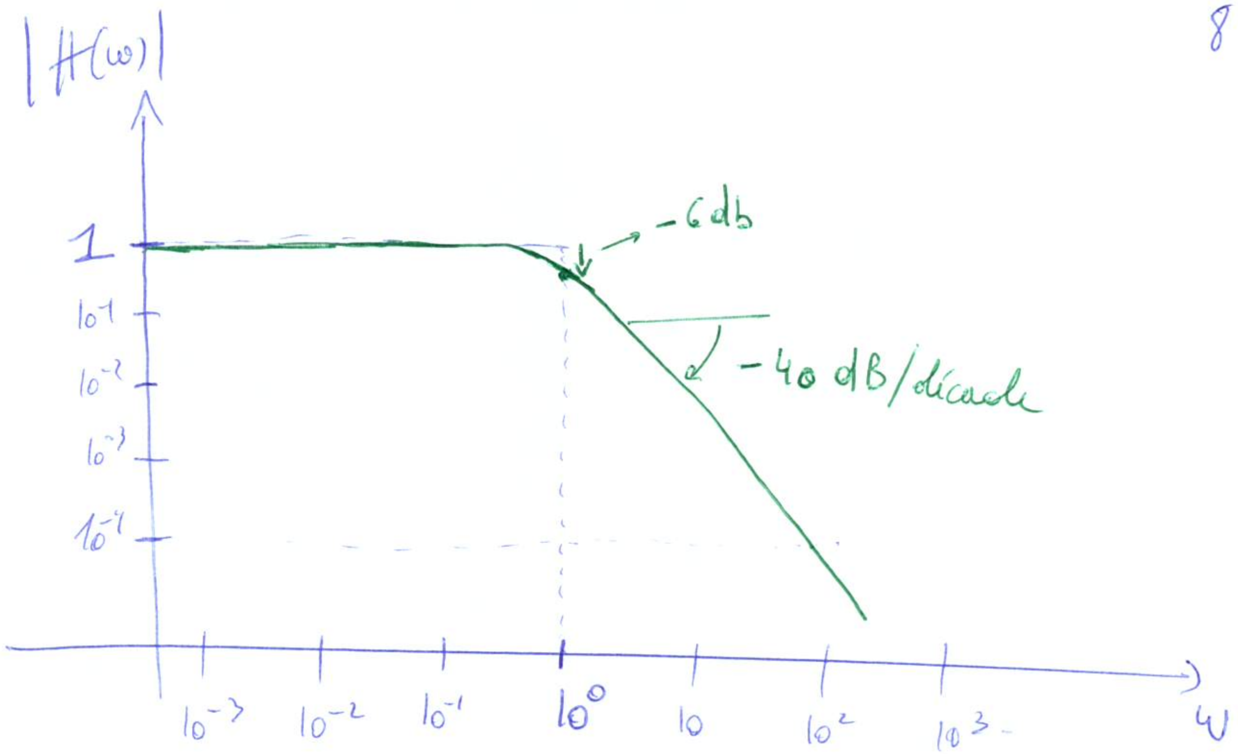


2)

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega-1)^2}\cdot\sqrt{1+(\omega+1)^2}}$$

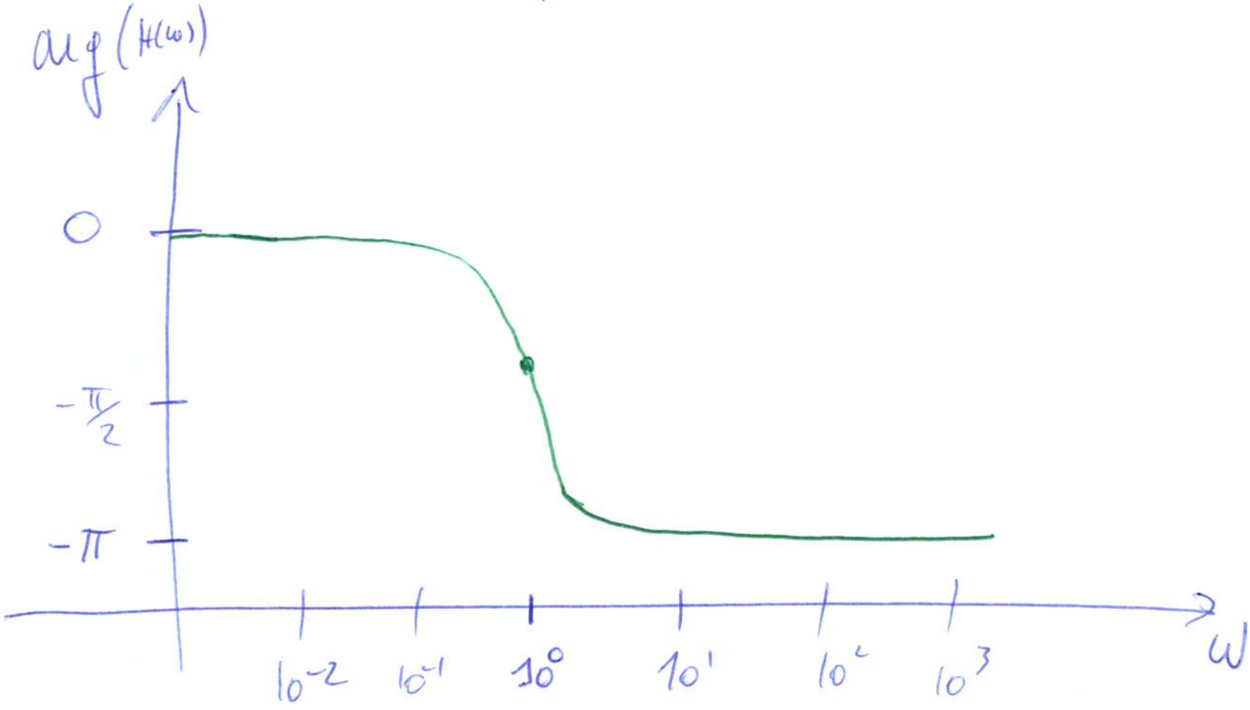
$$\Rightarrow 20\log_{10}|H(\omega)| = -20\log_{10}\left(1+(\omega-1)^2\right)^{1/2} - 20\log_{10}\left(1+(\omega+1)^2\right)^{1/2}$$

$$\simeq \begin{cases} \omega \gg 1 : & -40\log_{10}\omega \\ \omega = 1 : & -20\log_{10}\sqrt{5} = -10\log_{10}5 \quad \text{car } |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \omega \ll 1 : & 0 \quad \text{car } |H(\omega)| = 1 \end{cases}$$



$$\arg(H(\omega)) = -\arg(1+j(\omega-1)) - \arg(1+j(\omega+1))$$

$$= \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi & \text{si } \omega \gg 1 \\ 0 - \operatorname{arctg} 2 & \text{si } \omega = 1 \\ 0 & \text{si } \omega \ll 1 \end{cases}$$



3) Déterminons d'abord $x(t)$ sous forme de série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{où } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \, e^{jk\pi t}$$

<u>avec</u> $$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} \left(\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right) e^{-jk\pi t} \, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{(1-jk\pi)t} \, dt + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-(1+jk\pi)t} \, dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{(1-jk\pi)t}}{(1-jk\pi)}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-(1+jk\pi)t}}{-(1+jk\pi)}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(1+jk\pi)}{(1+k^2\pi^2)}\left(e\, e^{-jk\pi} - e^{-1} e^{jk\pi}\right)$$

$$- \frac{1}{4}\,\frac{(1-jk\pi)}{(1+k^2\pi^2)}\left(e^{-1} e^{jk\pi} - e\, e^{-jk\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{4} \frac{(e - e^{-1})}{(1+k^2\pi^2)} \left((1 + jk\pi) + (1 - jk\pi) \right)$$

$$= (-1)^k \frac{1}{2} \operatorname{Sh}(1) \cdot \frac{2}{(1+k^2\pi^2)}.$$

$$= (-1)^k \frac{\operatorname{sh}(1)}{(1+k^2\pi^2)}.$$

a) Puisque $H(\omega_k) = H(k\pi) = \dfrac{1}{(1+j(k\pi-1))(1+j(k\pi+1))}$

$$= \frac{(1 - j(k\pi - 1))(1 - j(k\pi+1))}{(1+(k\pi-1)^2)(1+(k\pi+1)^2)}.$$

$$= \frac{1 - j(k\pi-1) - j(k\pi+1) - (k^2\pi^2-1)}{(1+(k\pi-1)^2)(1+(k\pi+1)^2)}$$

$$= \frac{(2 - k^2\pi^2 - 2jk\pi)}{(1+(k\pi-1)^2)(1+(k\pi+1)^2)}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k \, e^{jk\pi t}$$

<u>avec</u> $\beta_k = (-1)^k \dfrac{sh(1)}{(1+k^2\pi^2)} \dfrac{(2-k^2\pi^2-2jk\pi)}{(1+(k\pi-1)^2)(1+(k\pi+1)^2)}$.

b) $y(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\pi t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\pi t)$

<u>avec</u> (Remarquons que $\beta_{-k} = \overline{\beta_k}$)

$$\begin{cases} a_0 = 2\beta_0 = 2\,sh\,1 \Rightarrow \dfrac{a_0}{2} = sh\,1. \\ a_k = \beta_k + \beta_{-k} = 2.(-1)^k \dfrac{sh(1)\,(2-k^2\pi^2)}{(1+k^2\pi^2)(1+(k\pi-1)^2)(1+(k\pi+1)^2)} \\ b_k = j(\beta_k - \beta_{-k}) = -(-1)^k \dfrac{sh(1)\,.\,4k\pi}{(1+k^2\pi^2)(1+(k\pi-1)^2)(1+(k\pi+1)^2)} \end{cases}$$

QUESTION III

$$y'' + 2y' + 2y = L\, u(t)$$

$$\Longleftrightarrow p^2 Y(p) - p\,y(0) - y'(0) + 2p\,Y(p) - 2y(0) + 2\,Y(p) = L\,\frac{1}{p}.$$

$$\Longleftrightarrow \left(p^2 + 2p + 2\right) Y(p) = \frac{L}{p} + (p+2).L$$

$$\Longleftrightarrow Y(p) = \frac{L}{p\left(p^2+2p+2\right)} + \frac{(p+2)\,L}{\left(p^2+2p+2\right)}$$

<u>avec</u> $p^2 + 2p + 2 = (p+1)^2 + 1$.

irréductible.

Il existe A, B et C tels que

$$\frac{1}{P\,(P^2+2P+2)} = \frac{A}{P} + \frac{BP+C}{P^2+2P+2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 = A(P^2+2P+2) + (BP+C)P$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A+C=0 \\ 2A=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-1. \end{array}\right.$$

Donc :

$$Y(P) = \frac{L}{2}\,\frac{1}{P} - \frac{L}{2}\,\frac{(P+2)}{P^2+2P+2} + \frac{L(P+2)}{(P^2+2P+2)}$$

$$= \frac{L}{2}\,\frac{1}{P} + \frac{L}{2}\,\frac{(P+1)}{\left[(P+1)^2+1\right]} + \frac{L}{2}\,\frac{1}{((P+1)^2+1)}$$

Dès lors,

$$y(t) = \frac{L}{2}\,u(t) + \frac{L}{2}\,e^{-t}\cos t\,u(t) + \frac{L}{2}\,e^{-t}\sin t\,u(t)$$