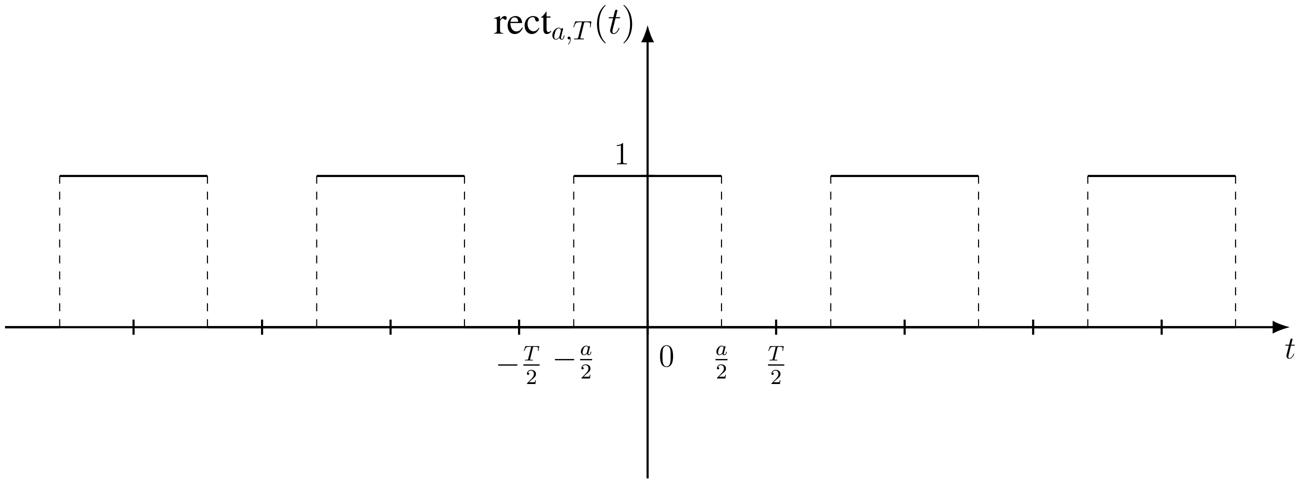
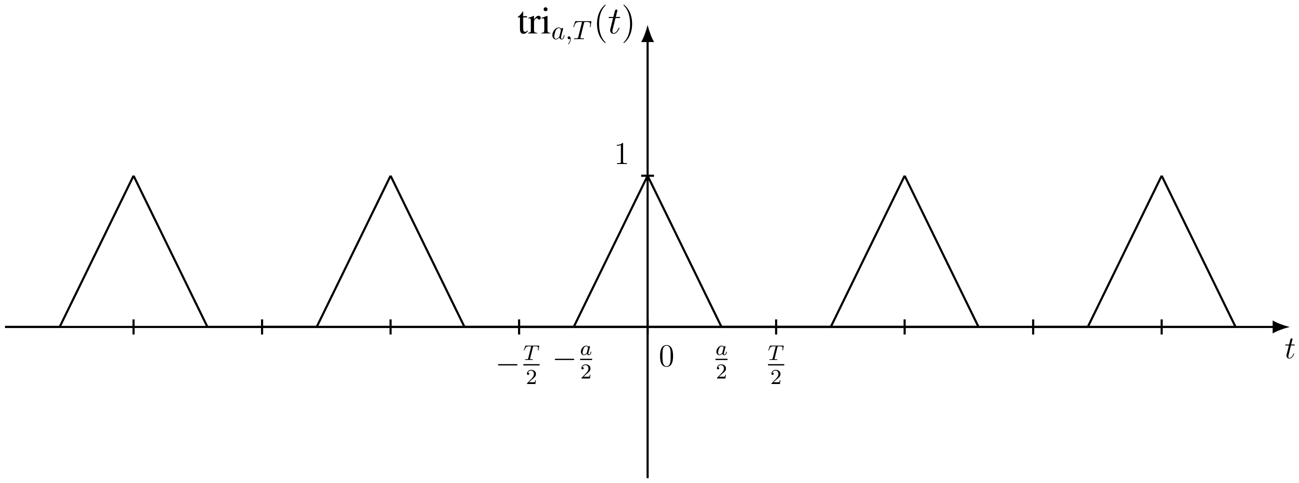
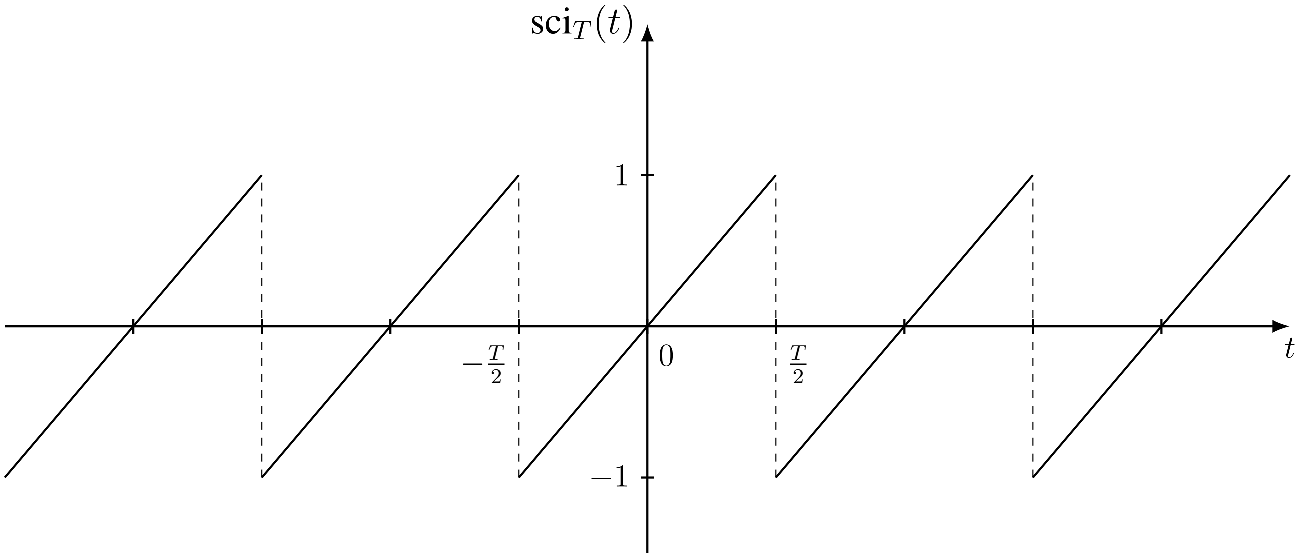
Signaux périodiques usuels







Fonctions usuelles

Echelon

$$\mathrm{ech}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Valeur principale de $\frac{1}{t}$ (vulgarisée...)

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Signe

$$\mathrm{sgn}\,(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ -1 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Produit de convolution

$$(f * g)\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

1 Séries de Fourier

Si f est périodique de période T et vérifie les conditions de Dirichlet, on a

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \, e^{jk\omega_0 t} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

avec

$$\boxed{\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad (k \in \mathbb{Z}).}$$

En posant

$$\begin{cases} a_k &= \alpha_k + \alpha_{-k} & (k \in \mathbb{N}_0) \\ b_k &= j(\alpha_k - \alpha_{-k}) & (k \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

on peut écrire

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

avec

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega_0 t) dt \quad \text{et} \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega_0 t) dt$$

Cas particuliers

- Si f est réel, $\alpha_{-k} = \overline{\alpha_k}$.
- Si f est réel et pair, les coefficients α_k sont réels et

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{avec } \alpha_k = \frac{a_k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- Si f est réel et impair, les coefficients α_k sont imaginaires purs et

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \alpha_k \, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{avec } \alpha_k = -\frac{j}{2}\, b_k \quad (k \in \mathbb{Z}_0).$$

Propriétés $(f(t) \leftrightarrow \alpha_k,\ g(t) \leftrightarrow \beta_k)$

$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda \alpha_k + \mu \beta_k$	$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$\overline{f(t)}$	$\overline{\alpha_{-k}}$	
$f(t - t_0)$	$e^{-jk\omega_0 t_0}\ \alpha_k$	$t_0 \in \mathbb{R}$
$f(-t)$	α_{-k}	
$f'(t)$	$jk\omega_0 \alpha_k$	

Formule de Parseval

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).}$$

Séries de Fourier de fonctions usuelles

$f(t)$	α_k	Conditions
$\mathrm{rect}_{a,T}(t)$	$\dfrac{a}{T}\ \mathrm{sinc}\left(\dfrac{k\omega_0 a}{2}\right)$	$0 < a \leq T$
$\mathrm{tri}_{a,T}(t)$	$\dfrac{a}{2\,T}\ \mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{k\omega_0 a}{4}\right)$	$0 < a \leq T$
$\mathrm{sci}_T(t)$	$\dfrac{(-1)^k j}{k\pi}$ si $k \neq 0, \quad \alpha_0 = 0$	

2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L_1(\mathbb{R})$ est définie par

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt \quad (= \mathcal{F}_\omega f)}$$

auquel cas

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega \quad (= \mathcal{F}_t^{-1} F).$$

Cas particuliers

- Si f est réel, $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$
- Si f est réel et pair, F est réel et pair et

$$F(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t\, dt$$

- Si f est réel et impair, F est imaginaire pur et impair et

$$F(\omega) = -2j \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t\, dt$$

Propriétés ($f(t) \leftrightarrow F(\omega),\ g(t) \leftrightarrow G(\omega)$)

Signal	Spectre	Conditions
$\lambda\, f(t) + \mu\, g(t)$	$\lambda\, F(\omega) + \mu\, G(\omega)$	$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$\overline{f(t)}$	$\overline{F(-\omega)}$	
$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}\, F(\omega)$	$t_0 \in \mathbb{R}$
$f(t)e^{jat}$	$F(\omega - a)$	$a \in \mathbb{R}$
$f(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\, F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$	$a \in \mathbb{R}_0$
$f(-t)$	$F(-\omega)$	
$f^{(m)}(t)$	$(j\omega)^m\, F(\omega)$	$m \in \mathbb{N}_0$
$t^m\, f(t)$	$j^m\, F^{(m)}(\omega)$	$m \in \mathbb{N}_0$
$(f * g)(t)$	$F(\omega)\, G(\omega)$	
$f(t)\, g(t)$	$\dfrac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$	

Formules de Parseval-Plancherel

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,\overline{G(\omega)}\,d\omega \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega. \end{aligned}}$$

Principe de dualité

$$\boxed{\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \text{alors} \quad F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)}$$

Transformées de Fourier de fonctions usuelles

$f(t)$	$\mathcal{F}_\omega f$	Conditions
$\mathrm{rect}_a(t)$	$a\ \mathrm{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right)$	$a > 0$
$\frac{\sin at}{t}$	$\pi\ \mathrm{rect}_{2a}(\omega)$	$a > 0$
$\mathrm{tri}_a(t)$	$\frac{a}{2}\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{a\omega}{4}\right)$	$a > 0$
$\frac{\sin^2 at}{t^2}$	$\pi a\ \mathrm{tri}_{4a}(\omega)$	$a > 0$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	$a > 0$
$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}\ e^{-a\|\omega\|}$	$a > 0$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$	$a > 0$
$\mathrm{ech}(t)\, e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$	$\mathcal{R}\alpha > 0$
$\mathrm{ech}(t)\, t\ e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$	$\mathcal{R}\alpha > 0$
$\mathrm{ech}(t)\, e^{-\alpha t}\cos bt$	$\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+b^2}$	$\mathcal{R}\alpha > 0,\ b \in \mathbb{R}$
$\mathrm{ech}(t)\, e^{-\alpha t}\sin bt$	$\frac{b}{(\alpha+j\omega)^2+b^2}$	$\mathcal{R}\alpha > 0,\ b \in \mathbb{R}$

Transformées de Fourier de distributions

Distribution	Spectre	Conditions
$\delta(t)$	1	
1	$2\pi\delta(\omega)$	
e^{jat}	$2\pi\delta(\omega - a)$	$a \in \mathbb{R}$
$\delta^{(m)}(t)$	$(j\omega)^m$	$m \in \mathbb{N}_0$
t^m	$2\pi j^m \delta^{(m)}(\omega)$	$m \in \mathbb{N}_0$
$\mathrm{sgn}(t)$	$-2j \ \mathrm{vp}\left(\frac{1}{\omega}\right)$	
$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right)$	$-j\pi \ \mathrm{sgn}(\omega)$	
ech(t)	$\pi\delta(\omega) - j \ \mathrm{vp}\left(\frac{1}{\omega}\right)$	
$\mathrm{pgn}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0)$	$T > 0, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Spectre discret d'une fonction périodique

Distribution	Spectre	Conditions
$f(t)$ périodique de période T et de motif $f_0(t)$	$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 F_0(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0)$	$f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\pi F(0)\delta(\omega) - jF(\omega)\,\mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{\omega}\right)$	

Si f est périodique de période T et de motif $f_0(t)$ et si $F_0(\omega) = \mathcal{F}_\omega\ f_0$, alors

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k\ e^{jk\omega_0 t}$$

où

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\ \omega_0\ F(k\omega_0).$$

3 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace d'une fonction f nulle sous 0 est définie par

$$\boxed{\mathcal{L}_p[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f(t)dt = F(p) \quad (p \in \mathbb{C})}.$$

Propriétés ($\alpha \in \mathbb{C},\ t_0 > 0,\ m \in \mathbb{N}_0$)

$\mathcal{L}_p\left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \mathcal{L}_p[f_i(t)],$
$\mathcal{L}_p\left[e^{\alpha t}\, f(t)\right] = \mathcal{L}_{p-\alpha}[f(t)],$
$\mathcal{L}_p\left[\text{ech}(t-t_0)\, f(t-t_0)\right] = e^{-pt_0}\, \mathcal{L}_p[f(t)],$
$\mathcal{L}_p[t^m\, f(t)] = (-1)^m\, \frac{d^m}{dp^m}\, \mathcal{L}_p[f(t)],$
$\mathcal{L}_p\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}_s[f(t)]ds,$
$\mathcal{L}_p[f(t)]\, \mathcal{L}_p[g(t)] = \mathcal{L}_p\left[\int_0^t f(s)\, g(t-s)ds\right] = \mathcal{L}_p[(f*g)(t)],$
$\mathcal{L}_p\left[\int_0^t f(s)ds\right] = \frac{1}{p}\, \mathcal{L}_p[f(t)],$

Transformée d'une dérivée

$$\boxed{\mathcal{L}_p[f^{(m)}(t)] = p^m\, \mathcal{L}_p[f(t)] - p^{m-1}f(0) - \cdots - f^{(m-1)}(0),}$$

Transformées usuelles $(\alpha \in \mathbb{C},\ \omega \in \mathbb{R}_0,\ m \in \mathbb{N}_0)$

$$\mathcal{L}_p[1] = \frac{1}{p}, \quad \mathcal{L}_p[t^m] = \frac{m!}{p^{m+1}} \quad \text{si } \mathcal{R}p > 0;$$

$$\mathcal{L}_p[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} \quad \text{si } n > -1 \text{ et } \mathcal{R}p > 0;$$

<u>NB</u> : $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(m) = (m-1)!;$

$$\mathcal{L}_p[e^{\alpha t}] = \frac{1}{p-\alpha} \quad \text{si } \mathcal{R}p > \mathcal{R}\alpha;$$

$$\mathcal{L}_p[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}_p[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2} \quad \text{si } \mathcal{R}p > 0.$$

Transformée de Laplace inverse

$$\boxed{\mathcal{L}_t^{-1}[f(p)] = f(t) \Leftrightarrow F(p) = \mathcal{L}_p[f(t)]}.$$

Propriétés ($\alpha \in \mathbb{C},\ t_0 > 0,\ m \in \mathbb{N}_0$)

$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ F_i(p)\right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ \mathcal{L}_t^{-1}[F_i(p)],$
$\mathcal{L}_t^{-1}[F(p-\alpha)] = e^{\alpha t}\ \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)],$
$\mathcal{L}_t^{-1}\left[e^{-pt_0}\ f(p)\right] = \text{ech}(t-t_0)\ \mathcal{L}_{t-t_0}^{-1}[F(p)],$
$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{d^m}{dp^m}\ F(p)\right] = (-1)^m\ t^m\ \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)],$
$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\int_p^{+\infty} F(s)ds\right] = \frac{1}{t}\ \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)],$
$\mathcal{L}_t^{-1}[F(p)\ G(p)] = \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)] * \mathcal{L}_t^{-1}[G(p)],$
$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\frac{F(p)}{p}\right] = \int_0^t\ \mathcal{L}_t^{-1}[F(p)]ds.$

Transformées inverses usuelles $(\alpha \in \mathbb{C},\ \omega \in \mathbb{R}_0,\ m \in \mathbb{N}_0)$

$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\dfrac{1}{p}\right], \quad \mathcal{L}_t^{-1}\left[\dfrac{1}{p^m}\right] = \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!};$
$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\dfrac{1}{p^n}\right] = \dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \quad \text{si } n > 0;$
$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\dfrac{1}{p-\alpha}\right] = e^{\alpha t};$
$\mathcal{L}_t^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+\omega^2}\right] = \dfrac{\sin \omega t}{\omega}, \quad \mathcal{L}_t^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right] = \cos \omega t.$