Examen Août 2023

Question I — 35%

Dans le système illustré à la Figure 1, on s'intéresse à la position $y(t)$ de la masse m en fonction de la position $x(t)$ de la plaque. On peut démontrer que ce système d'entrée $x(t)$ et de réponse $y(t)$ est causal linéaire temps invariant et caractérisé par la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}\right) u(t) \quad \text{où} \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la réponse indicielle du système.
2. Vérifier par le calcul que la réponse impulsionnelle est égale à la dérivée de la réponse indicielle.
3. La position de la plaque est définie par

$$x(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si} \quad t \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

   (a) Calculer (au sens des distributions) la vitesse $v(t)$ de la plaque et tracer les graphiques de $x(t)$ et $v(t)$.

   (b) Déterminer la position $y(t)$ de la masse pour tout $t \in \mathbb{R}$.

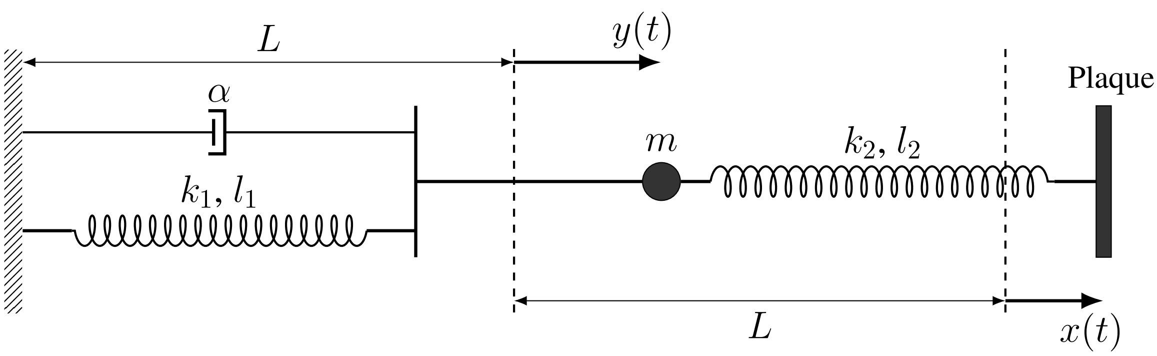

Figure 1: Illustration du système mécanique. La masse m est reliée par un premier ressort et un amortisseur à un mur fixe et par un second ressort à une plaque mobile. Les valeurs des paramètres sont fixées à $m = 1$ kg, $k_1 = 1$ N/m, $k_2 = 2$ N/m, $l_1 = l_2 = L$, $\alpha = 4$ Ns/m.

Question II 35%

On considère le système illustré à la Figure 1 dont la fonction de transfert est

$$H(\omega) = \frac{1}{(3 + \mathrm{j}\ \omega)\ (1 + \mathrm{j}\ \omega)}.$$

On impose à l'entrée un signal périodique $x(t)$ de période $T = 2$ et de fonction motif

$$x_{\text{motif}}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{t} & \text{si} \quad t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]-1, 0[\end{cases}$$

1. Esquisser le graphique de $x(t)$.
2. Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert.
3. Déterminer la sortie $y(t)$ du système en l'exprimant sous la forme
   (a) d'une série de Fourier,
   (b) d'une série de Fourier en sinus et cosinus.

Question III 30%

Le système illustré sur la Figure 1 peut être modélisé par l'équation différentielle

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 3\,y(t) = x(t).$$

Utiliser les transformées de Laplace pour résoudre cette équation dans le cas où

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2\,t}\ u(t)$$

en tenant compte des conditions initiales

$$y(0) = 0 \ \text{ et } \ y'(0) = 0.$$

FORMULES

Primitives

$$\int \mathrm{e}^{a\,v}\ \cos v\,dv = \frac{\mathrm{e}^{a\,v}}{1+a^2}\ (a\ \cos v + \sin v) + C$$

$$\int \mathrm{e}^{a\,v}\ \sin v\,dv = \frac{\mathrm{e}^{a\,v}}{1+a^2}\ (a\ \sin v - \cos v) + C$$

Produit de convolution

$$(f \star g)\,(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(\tau)\ g(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(t-\tau)\ g(\tau)\,d\tau$$

Séries de Fourier d'une fonction périodique de période T

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,k\,\frac{2\pi}{T}\,t}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k\,\frac{2\pi}{T}\,t}\ dt$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\ \cos\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\ \sin\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right)$$

$$a_0 = 2\,\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right)\ dt$$

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \cos\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right)\ dt$$

$$b_k = \mathrm{j}\ (\alpha_k - \alpha_{-k}) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \sin\left(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t\right)\ dt$$

Transformées de Laplace

$$\mathcal{L}_p\left[\mathrm{e}^{-a\,t}\ u(t)\right] = \frac{1}{p+a}$$

$$\mathcal{L}_p\left[\mathrm{e}^{-a\,t}\ \cos(\omega\,t)\,u(t)\right] = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}_p\left[\mathrm{e}^{-a\,t}\ \sin(\omega\,t)\,u(t)\right] = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}_p\left[y'(t)\right] = p\,Y(p) - y(0)$$

$$\mathcal{L}_p\left[y''(t)\right] = p^2\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0)$$