Question I

Un système causal linéaire temps invariant est caractérisé par la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \sin(3\,t)\ \mathrm{ech}\,(t)$$

1. Esquisser le graphique de $h(t)$.
2. Déterminer sa réponse indicielle et esquisser son graphique.
3. Vérifier par le calcul que la réponse impulsionnelle est égale à la dérivée de la réponse indicielle.
4. Calculer la réponse du système à l'entrée

$$x(t) = \mathrm{ech}(t-1) - \mathrm{ech}(t-5) + \delta(t-3)$$

5. Calculer la transformée de Fourier de $h(t)$.
6. En déduire la réponse du système à l'entrée

$$x(t) = \cos^2 t$$

Question II

On considère un système d'entrée x et de sortie y caractérisée par l'équation différentielle

$$2\,y'(t) + y(t) * \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{ech}(t) = x(t)$$

Si l'entrée x est le signal périodique de période $T = 4$ suivant

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sci}_4(t-2) + 1\right)$$

exprimer la sortie y sous la forme

1. d'une série de Fourier,
2. d'une série de Fourier en sinus et cosinus.

Question III

Un système est modélisé par l'équation différentielle

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

Utiliser les transformées de Laplace pour résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales

$$y(0) = \cdots \ \text{ et } \ y'(0) = \cdots \ \text{ et } \ \cdots$$

Question I

Un système causal linéaire temps invariant est caractérisé par la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \sin(3\,t)\ \mathrm{ech}\,(t)$$

1. Esquisser le graphique de $h(t)$.
2. Déterminer sa réponse indicielle et esquisser son graphique.
3. Vérifier par le calcul que la réponse impulsionnelle est égale à la dérivée de la réponse indicielle.
4. Calculer la réponse du système à l'entrée

$$x(t) = \mathrm{ech}(t-1) - \mathrm{ech}(t-5) + \delta(t-3)$$

5. Calculer la transformée de Fourier de $h(t)$.
6. En déduire la réponse du système à l'entrée

$$x(t) = \cos^2 t$$

Question II

On considère un système d'entrée x et de sortie y caractérisée par l'équation différentielle

$$2\,y'(t) + y(t) * \mathrm{e} - t\,\mathrm{ech}(t) = x(t)$$

Si l'entrée x est le signal périodique de période $T = 4$ suivant

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sci}_4(t-2) + 1\right)$$

exprimer la sortie y sous la forme

1. d'une série de Fourier,
2. d'une série de Fourier en sinus et cosinus.

Question III

Un système est modélisé par l'équation différentielle

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

Utiliser les transformées de Laplace pour résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales

$$y(0) = \cdots \ \text{ et } \ y'(0) = \cdots \ \text{ et } \ \cdots$$

Rappels

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow h(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t)$$

où $$y(t) = (x * h)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau.$$

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow H(\omega)\, e^{j\omega t}$$

où $H(\omega) = \mathcal{F}_{\omega}\big(h(t)\big)$.

<u>Dans le domaine fréquentiel :</u>

$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow Y(\omega)$$

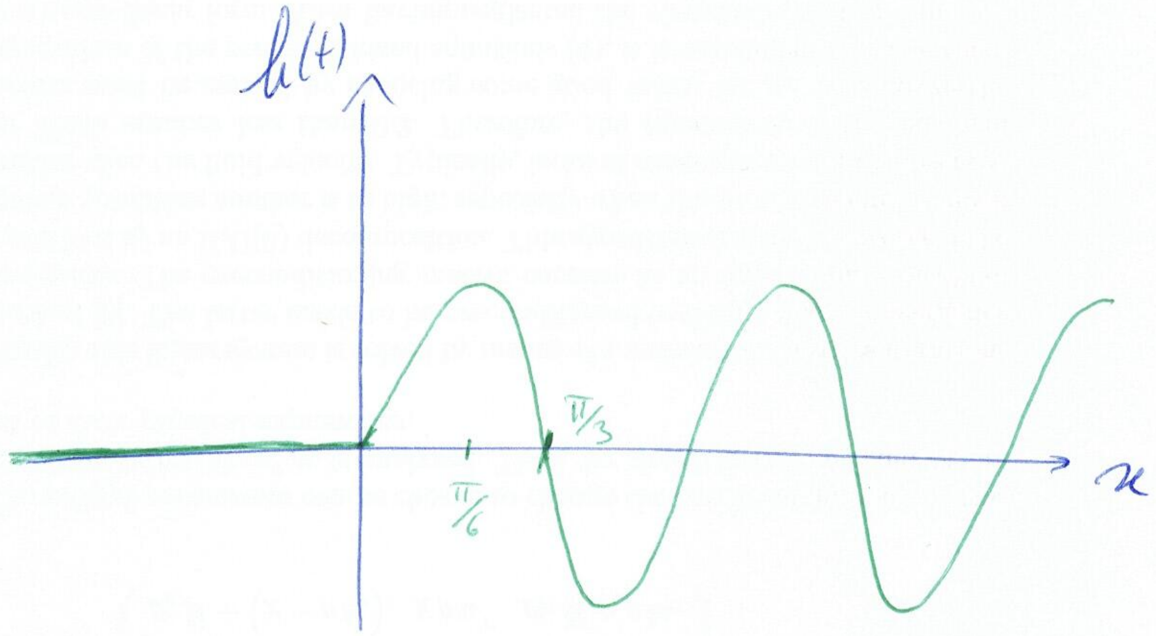
où $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

Car $\mathcal{F}_{\omega}\big((x * h)(t)\big) = \mathcal{F}_{\omega}\big(x(t)\big) \cdot \mathcal{F}_{\omega}\big(h(t)\big)$

QUESTION I

$$h(t) = \sin(3t)\, ech(t)$$

1)



2)

$$S\big(ech(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} ech(\tau) \cdot \sin\big(3(t-\tau)\big) \cdot ech(t-\tau)\, d\tau$$

si $t<0$: $= 0$

$$ech(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < 0 \\ 1 & \text{si } \tau > 0 \end{cases}$$

$$ech(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau > t \\ 1 & \text{si } \tau < t \end{cases}$$

si $t>0$:

$$= \int_0^t \sin\big(3(t-\tau)\big)\, d\tau \overset{u=t-\tau}{=} -\int_t^0 \sin(3u)\, du$$

$$= \left[\frac{\cos(3u)}{3}\right]_t^0 = \frac{1}{3}\big(1-\cos(3t)\big)$$

Donc $S(\text{ech}(t)) = \frac{1}{3}\left(1-\cos(3t)\right)\text{ech}(t)$

3)

$$[S(\text{ech}(t))]' = \frac{1}{3}\,3\sin(3t)\,.\,\text{ech}(t) + \frac{1}{3}\left(1-\cos(3t)\right)\text{ech}'(t)$$

$$= \sin(3t)\,\text{ech}(t) + \frac{1}{3}\underbrace{\left(1-\cos(3t)\right)}_{=0 \text{ si } t=0}\delta(t)$$

$$= \sin(3t)\,\text{ech}(t) = \underline{\underline{h(t)}}$$

4)

$$x(t) = \text{ech}(t-1) - \text{ech}(t-5) + \delta(t-3)$$

__Méthode 1__ Calculons le produit de convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\text{ech}(\tau-1) - \text{ech}(\tau-5) + \delta(\tau-3)\right] \sin(3(t-\tau))\,\text{ech}(t-\tau)\,d\tau$$

avec

$$\text{ech}(\tau-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau<1 \\ 1 & \text{si } \tau>1 \end{cases} \qquad \text{ech}(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau>t \\ 1 & \text{si } \tau<t \end{cases}$$

$$\text{ech}(\tau-5) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau<5 \\ 1 & \text{si } \tau>5 \end{cases}$$

① Si $t < 1$

$$y(t) = 0$$

② Si $t \in [1, 3[$:

$$y(t) = \int_1^t \sin(3(t-\tau))\, d\tau$$

$$= \left[\frac{\cos(3(t-\tau))}{3}\right]_1^t = \frac{1 - \cos(3(t-1))}{3}$$

③ Si $t \in [3, 5]$

$$y(t) = \int_1^t (1 + \delta(\tau - 3)) \sin(3(t-\tau))\, d\tau$$

$$= \left[\frac{\cos(3(t-\tau))}{3}\right]_1^t + \sin(3(t-3))$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \cos(3(t-1))\right) + \sin(3(t-3))$$

Remarque : On pouvait plutôt écrire :

$$y(t) = \int_1^t 1 \cdot \sin(3(t-\tau))\, d\tau + \int_{-\infty}^t \delta(\tau - 3) \sin(3(t-\tau))\, d\tau$$

④ Si $t > 5$

$$y(t) = \int_{1}^{5} 1 \sin(3(t-\tau))\,d\tau + \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-3)\sin(3(t-\tau))\,d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\cos(3(t-5)) - \cos(3(t-3))\Big) + \sin(3(t-3))$$

CONCLUSION :

$$y(t) = \frac{1}{3}\big(1-\cos(3(t-3))\big).\big(ech(t-3) - ech(t-5)\big)$$

$$+ \frac{1}{3}\big(\cos(3(t-5)) - \cos(3(t-3))\big)\, ech(t-5)$$

$$+ \sin(3(t-3))\, ech(t-3)$$

Méthode 2 :

$$y(t) = S\big(ech(t-1)\big) - S\big(ech(t-3)\big) + S\big(\delta(t-3)\big)$$

$$= \frac{1}{3}\big(1-\cos(3(t-1))\big)\, ech(t-1)$$

$$- \frac{1}{3}\big(1-\cos(3(t-5))\big)\, ech(t-5)$$

$$+ \sin(3(t-3))\, ech(t-3)$$

5) $$\hat{\mathcal{F}}_{\omega}\left(\sin(3t)\,\mathrm{ech}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\hat{\mathcal{F}}_{\omega}\left(e^{3jt}\,\mathrm{ech}(t)\right) - \frac{1}{2j}\hat{\mathcal{F}}_{\omega}\left(e^{-3jt}\,\mathrm{ech}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\pi\,\delta(\omega-3) - j\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\omega-3}\right)\right]$$

$$- \frac{1}{2j}\left[\pi\,\delta(\omega+3) - j\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\omega+3}\right)\right]$$

$$= -j\frac{\pi}{2}\delta(\omega-3) - \frac{1}{2}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\omega-3}\right)$$

$$+ j\frac{\pi}{2}\delta(\omega+3) + \frac{1}{2}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\omega+3}\right)$$

$$= j\frac{\pi}{2}\delta(\omega+3) - j\frac{\pi}{2}\delta(\omega-3)$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\omega+3}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\omega-3}\right)$$

$$= H(\omega)$$

6)

$$x(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-2jt}$$

$$\Rightarrow y(t) = H(0)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}H(2)e^{j2t} + \frac{1}{2}H(-2)e^{-j2t}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-3}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\frac{1}{(-1)}\right)e^{j2t}$$

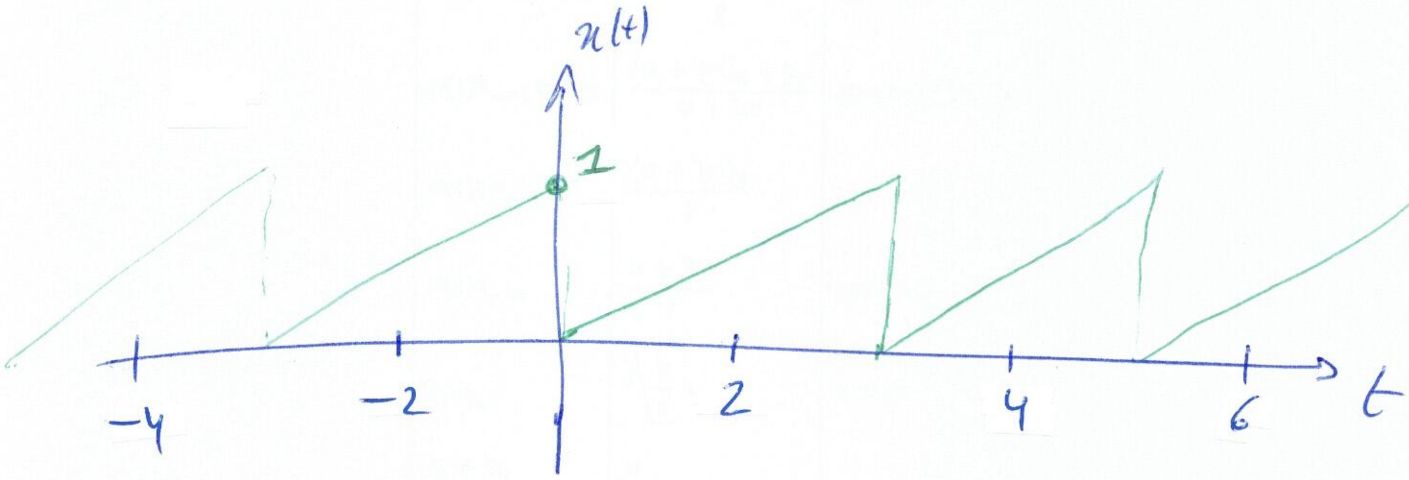
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(-5)}\right)e^{-2jt}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\frac{6}{5}e^{2jt} + \frac{1}{4}\frac{6}{5}e^{-2jt}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{3}{5}\cos(2t)$$

QUESTION II :

$$2\,y'(t) + y(t) * e^{-t}\,ech(t) = x(t)$$



$$T = 4 \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(sci_4(t-2) + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, sci_4(t-2)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, j}{k\pi}\, \underbrace{e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 2}}_{=(-1)^k}\, e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{j}{k\pi}\, e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

Calculons la fonction de transfert :

Si $x(t) = e^{j\omega t}$ alors $y(t) = H(\omega) e^{j\omega t}$

Donc

$$H(\omega).2j\omega e^{j\omega t} + \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega\tau} e^{-(t-\tau)} \mathrm{ech}(t-\tau) d\tau$$

$$= e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow H(\omega) 2j\omega e^{j\omega t} + H(\omega) e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{j\omega\tau} e^{\tau} d\tau$$

$$= e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow H(\omega).2j\omega e^{j\omega t} + H(\omega) e^{-t} \left[\frac{e^{(1+j\omega)\tau}}{(1+j\omega)}\right]_{-\infty}^{t} = e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow H(\omega).2j\omega e^{j\omega t} + \frac{H(\omega)}{(1+j\omega)} e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow H(\omega) \cdot \left[2j\omega + \frac{1}{(1+j\omega)}\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow H(\omega) = \frac{(1+j\omega)}{2j\omega - 2\omega^2 + 1}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\cdot \underset{\omega=0}{H(0)} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{j}{k\pi} H\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

$$\omega = \omega_k = k\,\omega_0 = k\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{j}{(k\pi)}\cdot\frac{1+j\,k\frac{\pi}{2}}{2j\frac{k\pi}{2} - 2\frac{k^2\pi^2}{4} + 1}\, e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

<u>Série de sinus et cosinus !</u>

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k}$$

$$= \frac{j}{k\pi}\,\frac{(1+jk\pi)}{\left(jk\pi - \frac{k^2\pi^2}{2} + 1\right)} + \frac{j}{(-k\pi)}\,\frac{1-jk\pi}{\left(-jk\pi - \frac{k^2\pi^2}{2} + 1\right)}$$

$$= \frac{j}{(k\pi)}\,\frac{(1+jk\pi)\left(-jk\pi - \frac{k^2\pi^2}{2}+1\right) - (1-jk\pi)\left(jk\pi - \frac{k^2\pi^2}{2}+1\right)}{\left(1-\frac{k^2\pi^2}{2}\right)^2 + k^2\pi^2}$$

$$= \frac{j}{(k\pi)}\,\frac{\left(-2jk\pi - jk^3\pi^3 + 2jk\pi\right)}{\left(1 + \frac{k^4\pi^4}{4}\right)}$$

$$= \frac{k^2\pi^2}{\left(1 + \frac{k^4\pi^4}{4}\right)}$$

$$b_k = j\,(\alpha_k - \alpha_{-k})$$

$$= j\left[\frac{j}{k\pi}\,\frac{(1+jk\pi)}{\left(jk\pi - \frac{k^2\pi^2}{2}+1\right)} - \frac{j}{(-k\pi)}\,\frac{1-jk\pi}{\left(-jk\pi - \frac{k^2\pi^2}{2}+1\right)}\right]$$

$$= \frac{-1}{k\pi}\,\frac{\left((1+jk\pi)\left(-jk\pi - k^2\frac{\pi^2}{2}+1\right) + (1-jk\pi)\left(jk\pi - k^2\frac{\pi^2}{2}+1\right)\right)}{\left(k^2\pi^2 + \left(1-\frac{k^2\pi^2}{2}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{-1}{k\pi}\,\frac{-k^2\pi^2 + 2 + 2k^2\pi^2}{\left(1+\frac{k^4\pi^4}{4}\right)}.$$

$$= \frac{-\left(k^2\pi^2+2\right)}{\left(1+\frac{k^4\pi^4}{4}\right)}$$

$$= -2\cdot\frac{\left(1+\frac{k^2\pi^2}{2}\right)}{1+\frac{k^4\pi^4}{4}}$$

Conclusion :

$$y(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2\pi^2}{\left(1+\frac{k^4\pi^4}{4}\right)} \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} (-2) \frac{\left(1+\frac{k^2\pi^2}{2}\right)}{\left(1+\frac{k^4\pi^4}{4}\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)$$