Examen Juin 2024

Question I 30%

Un système causal linéaire temps invariant est caractérisé par la réponse impulsionnelle

$$h(t) = t\ \mathrm{e}^{-2\,t}\,\mathrm{ech}(t)$$

1. Esquisser le graphique de $h(t)$.
2. Déterminer sa réponse indicielle et esquisser son graphique.
3. Vérifier par le calcul que la réponse impulsionnelle est égale à la dérivée de la réponse indicielle.
4. Calculer la réponse du système à l'entrée

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2\,t} & \text{si} \quad x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, 2] \end{cases}$$

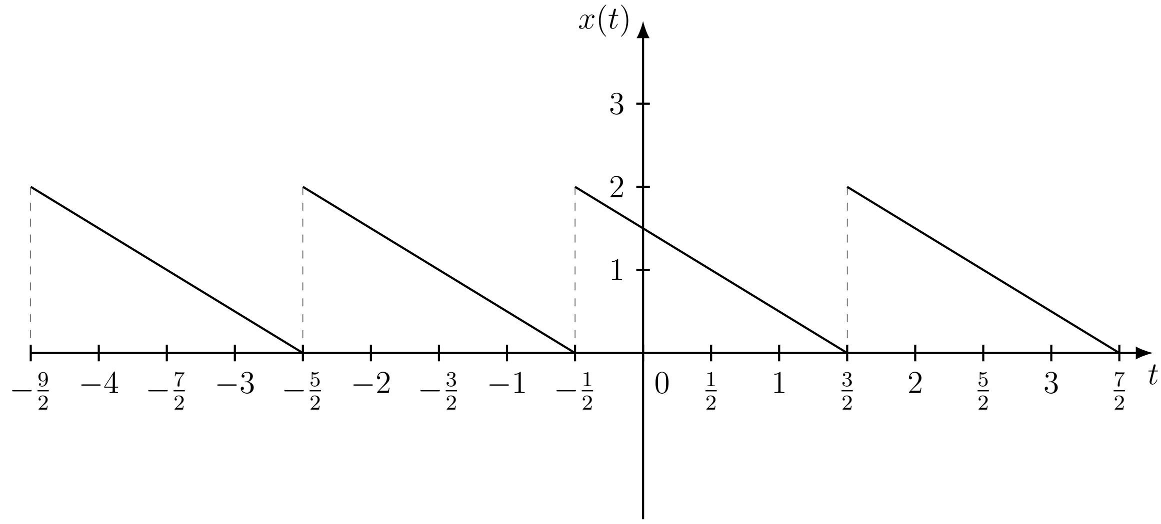
5. Calculer la transformée de Fourier de $h(t)$.
6. En déduire la réponse du système à l'entrée $\quad x(t) = 3 + 4\,\sin\left(2\,t + \dfrac{\pi}{6}\right)$

Question II **35%**

On considère un système d'entrée x et de sortie y caractérisé par l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = x(t) - \mathrm{e}^{-t} \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ \mathrm{e}^{\tau}\ d\tau$$

Si l'entrée x est le signal périodique représenté ci-dessous



exprimer la sortie y sous la forme

1. d'une série de Fourier,
2. d'une série de Fourier en sinus et cosinus.

Question III **35%**

Un système est modélisé par l'équation différentielle

$$y''(t) + 5\,y'(t) + 6\,y(t) = \mathrm{ech}(t) + \mathrm{e}^{-(t-1)}\ \mathrm{ech}(t-1)$$

Utiliser les transformées de Laplace pour résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales

$$y(0) = 1 \ \text{ et } \ y'(0) = 0$$

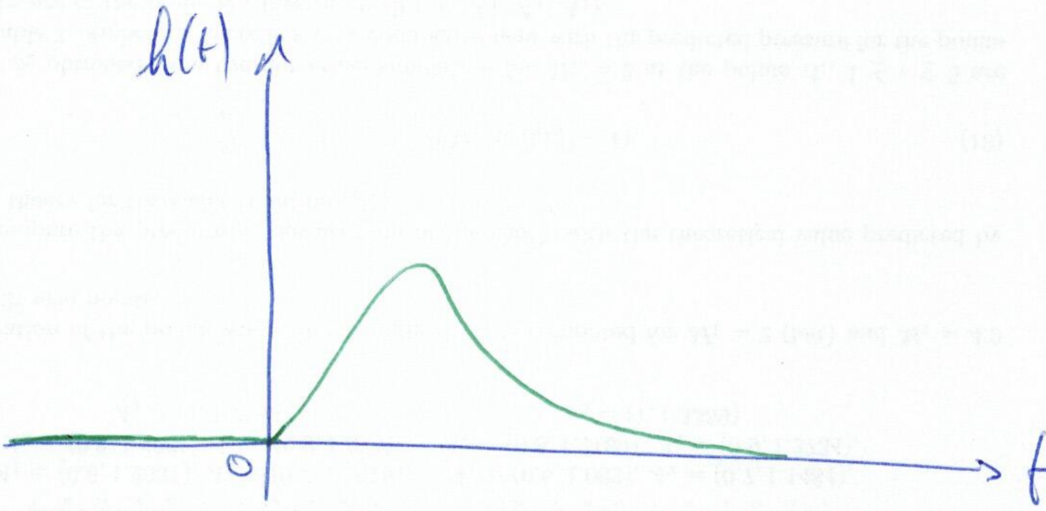
La relation suivante sera sans doute utile

$$\frac{1}{(z+a)\ (z+b)} = \frac{1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(z+a)} - \frac{1}{(z+b)} \right] \quad \text{si} \quad a \neq b$$

QUESTION I

$$h(t) = t\, e^{-2t}\, ech(t)$$

1)



2)

$$S(ech(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} ech(\tau)\,(t-\tau)\,e^{-2(t-\tau)}\, ech(t-\tau)\, d\tau$$

<u>Si $t<0$</u>

$$S(ech(t)) = 0$$

<u>Si $t>0$:</u>

$$S(ech(t)) = \int_0^t (t-\tau)\, e^{-2(t-\tau)}\, d\tau \qquad \begin{pmatrix} v = t-\tau \\ dv = -d\tau \end{pmatrix}$$

$$= -\int_t^0 v\, e^{-2v}\, dv = \int_0^t v\, e^{-2v}\, dv$$

$$= \left[v \frac{e^{-2v}}{-2} \right]_0^t - \int_0^t \frac{e^{-2v}}{(-2)}\, dv$$

$$= -\frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{4}$$

Dès lors, $S(ech(t)) = \frac{1}{4}\left(1-(1+2t)e^{-2t}\right) ech(t)$

3)

$$\left[S(ech(t))\right]' = -\frac{1}{4}(1+2t)\cdot(-2)e^{-2t}\,ech(t)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2t}\,ech(t) + \frac{1}{4}\underbrace{\left(1-(1+2t)e^{-2t}\right)}_{=0 \text{ si } t=0}\delta(t)$$

$$= t e^{-2t}\,ech(t) = h(t).$$

4)

$$x(t) = \left(1-e^{-2t}\right)\left(ech(t) - ech(t-2)\right)$$

$$= ech(t) - ech(t-2) - e^{-2t}\,ech(t) + e^{-2t}\,ech(t-2).$$

1°

$$S(e^{-2t}ech(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}\,ech(\tau)\,(t-\tau)\,e^{-2(t-\tau)}\,ech(t-\tau)\,d\tau$$

$$= e^{-2t}\int_0^t (t-\tau)\,d\tau \cdot ech(t)$$

$v = t-\tau$

$dv = -d\tau$

$$= e^{-2t}\int_0^t v\,dv\,ech(t) = \frac{t^2}{2}e^{-2t}\,ech(t)$$

② $S\left(e^{-2t}\,ech(t-2)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}\,ech(\tau-2)\,(t-\tau)\,e^{-2(t-\tau)}\,ech(t-\tau)\,d\tau$

$$= e^{-2t} \int_{2}^{t} (t-\tau)\,d\tau \cdot ech(t-2)$$

$v = t-\tau$
$dv = -d\tau$

$$= e^{-2t} \int_{0}^{t-2} v \, dv \; ech(t-2)$$

$$= e^{-2t} \frac{(t-2)^2}{2} \; ech(t-2)$$

Donc

$$y(t) = S\left(ech(t)\right) - S\left(ech(t-2)\right) - S\left(e^{-2t}\,ech(t)\right) + S\left(e^{-2t}\,ech(t-2)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-(1+2t)\,e^{-2t}\right) ech(t) - \frac{1}{4}\left(1-(1+2(t-2))\,e^{-2(t-2)}\right) ech(t-2)$$

$$- e^{-2t}\frac{t^2}{2}\,ech(t) + e^{-2t}\frac{(t-2)^2}{2}\,ech(t-2)$$

5)

$$H(\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} = \frac{(2-j\omega)^2}{(4+\omega^2)^2}.$$

6)

$$x(t) = 3 + \frac{4}{2j} e^{j2t} e^{j\frac{\pi}{6}} - \frac{4}{2j} e^{-2jt} e^{-j\pi/6}$$

$$= 3 - 2j\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) e^{j2t} + 2j\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) e^{-2jt}$$

$$= 3 + (-1-\sqrt{3}j) e^{j2t} + (1+\sqrt{3}j) e^{-2jt}$$

$$y(t) = H(0).3 + (-1-\sqrt{3}j) H(2) e^{2jt} + (1+\sqrt{3}j) H(-2) e^{-j2t}$$

$$= \frac{3}{4} + (-1-\sqrt{3}j) \frac{2(1-j)^2}{64} e^{2jt} + (1+\sqrt{3}j) \frac{2(1+j)^2}{64} e^{-2jt}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{32}(-1-\sqrt{3}j)(-2j) e^{2jt} + \frac{1}{32}(1+\sqrt{3}j) 2j e^{-2jt}$$

$\frac{1}{16}(j-\sqrt{3})$

$= \frac{1}{8}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right)$

$= \frac{1}{8} e^{j\frac{5\pi}{6}}$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{16}(j-\sqrt{3}) e^{2jt} + \frac{1}{16}(j-\sqrt{3}) e^{-2jt}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos(2t) - \frac{1}{8}\sin(2t)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(2t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

QUESTION II :

$$y'(t) - y(t) = x(t) - e^{-t}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, e^{\tau}\, d\tau .$$

Calculons la fonction de transfert

$$H(\omega)\, j\omega\, e^{j\omega t} - H(\omega)\, e^{j\omega t} = e^{j\omega t} - e^{-t} H(\omega) \left[\frac{e^{(1+j\omega)\tau}}{(1+j\omega)}\right]_{-\infty}^{t}$$

$$\Rightarrow (j\omega - 1)\, H(\omega) = 1 - \frac{1}{(1+j\omega)}.$$

$$\Rightarrow -(1-j\omega)\, H(\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{-j\omega}{(1+\omega^2)}.$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$x(t) = 1 - \mathrm{Sci}_2\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} j\, e^{-jk\pi\frac{1}{2}} e^{jk\pi t}$$

$$= 1 - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} j (-j)^k e^{jk\pi t}.$$

$$= 1 - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \underbrace{\frac{j^{k+1}}{k\pi}}_{=\alpha_k} e^{jk\pi t}.$$

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} = \frac{j^{k+1}}{k\pi} + \frac{j^{-k+1}}{-k\pi} = \frac{j}{k\pi}\left(j^k - j^{-k}\right)$$

$$= \frac{j}{k\pi}\left(j^k - (-j)^k\right) = \frac{j^{k+1}}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right)$$

Si k est pair alors $a_k = 0$

Si k est impair alors il existe p tel que $k = 2p-1$

et $a_k = a_{2p-1} = \frac{2}{(2p-1)\pi}(-1)^p$

Ce ci n'est pas demandé...

$$b_k = j\left(\alpha_k - \alpha_{-k}\right)$$

$$= j\left(\frac{j^{-k+1}}{k\pi} - \frac{j^{-k+1}}{(-k\pi)}\right)$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{k\pi}\left(j^{-k} + (-j)^{k}\right)$$

$$= \frac{-j^{-k}}{k\pi}\left(1 + (-1)^{k}\right)$$

Si k est impaire alors $b_k = 0$

si k est pair alors il existe p tel que $k = 2p$

et $b_k = -\frac{(-1)^p}{2p\pi} \cdot 2$

Finalement, on a

$$x(t) = 1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^p}{(2p-1)\pi} \cos\left((2p-1)\pi t\right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^p}{2p\pi} \sin(2p\pi t)$$

Ceci n'est pas demandé.

$$y(t) = 1 . \underbrace{H(0)}_{= 0} - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \underbrace{\frac{j^{k+1}}{k\pi} \cdot \frac{(-j k\pi)}{(1+k^2\pi^2)}}_{= \alpha_k} e^{jk\pi t}$$

$$\alpha_k = \frac{j^k}{1+k^2\pi^2} \qquad (j)^{(-1)} = -j$$

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} = \frac{j^k}{1+k^2\pi^2} + \frac{j^{-k}}{1+k^2\pi^2}$$

$$= \frac{j^k}{1+k^2\pi^2} \left(1 + (-1)^k\right)$$

Si k est pair alors $k = 2p$ et $a_k = \frac{(-1)^p}{1+4p^2\pi^2} . 2$

si k est impair alors $a_k = 0$

$$b_k = j\left(\alpha_k - \alpha_{-k}\right) = j \frac{1}{1+k^2\pi^2}\left(j^k - j^{-k}\right)$$

$$= j^{k+1} \frac{1}{1+k^2\pi^2} \left(1 - (-1)^k\right)$$

Si k est pair alors $b_k = 0$

Si k est impair alors $k = 2p-1$

et $b_k = (-1)^p \frac{1}{(1+k^2\pi^2)} 2$.

$$y(t) = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^p}{(1+4p^2\pi^2)} \cos(2p\pi t)$$

$$- \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^p}{(1+(2p-1)^2\pi^2)} \sin((2p-1)\pi t).$$

QUESTION III

$$y'' + 5y' + 6y = ech(t) + e^{-(t-1)}\, ech(t-1)$$

avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

$$P^2 Y(P) - P y(0) - y'(0) + 5P Y(P) - 5y(0) + 6Y(P)$$

$$= \frac{1}{P} + \frac{e^{-P}}{(P+1)}$$

$$\Leftrightarrow (P^2 + 5P + 6)\, Y(P) = P + 5 + \frac{1}{P} + \frac{e^{-P}}{(P+1)}$$

$$P^2 + 5P + 6 = 0 \Leftrightarrow P = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Y(P) = \frac{1}{(P+2)(P+3)} \left(P + 5 + \frac{1}{P} + \frac{e^{-P}}{P+1} \right)$$

$$= \left[\frac{1}{(P+2)} - \frac{1}{(P+3)} \right] \cdot \left[P + 5 + \frac{1}{P} + \frac{e^{-P}}{(P+1)} \right]$$

$$= \frac{P+5}{P+2} - \frac{P+5}{P+3} + \frac{1}{P(P+2)} - \frac{1}{P(P+3)}$$

$$+ \frac{e^{-P}}{(P+2)(P+1)} - \frac{e^{-P}}{(P+3)(P+1)}$$

$$Y(p) = 1 + \frac{3}{(p+2)} - 1 - \frac{2}{(p+3)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2}\right)$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+3}\right) + \frac{e^{-p}}{(p+1)} - \frac{e^{-p}}{(p+2)}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-p}}{p+1} - \frac{e^{-p}}{p+3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{-p}}{(p+1)} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)} - \frac{e^{-p}}{(p+2)} - \frac{5}{3}\,\frac{1}{(p+3)} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{-p}}{(p+3)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{6}\,ech(t) + \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\,ech(t-1) + \frac{5}{2}e^{-2t}\,ech(t)$$

$$- e^{-2(t-1)}\,ech(t-1) - \frac{5}{3}e^{-3t}\,ech(t)$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-3(t-1)}\,ech(t-1)$$

<u>Calculons la dérivée : y'</u>

$$y'(t) = \frac{1}{6}\,\delta(t) - \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\,ech(t-1) + \frac{1}{2}e^{-(t-1)}\,\delta(t-1)$$

$$- 5e^{-2t}\,ech(t) + \frac{5}{2}e^{-2t}\,\delta(t) + 2e^{-2(t-1)}\,ech(t-1)$$

$$- e^{-2(t-1)}\,\delta(t-1) + 5e^{-3t}\,ech(t) - \frac{5}{3}e^{-3t}\,\delta(t)$$

$$- \frac{3}{2}e^{-3(t-1)}\,ech(t-1) + \frac{1}{2}e^{-3(t-1)}\,\delta(t-1)$$